# Analysis III

Bernold Fiedler*

WS 2009/10

*Mitschrift erstellt von Alexander Fritz

Dieses Dokument wurde auf der Grundlage eigener Vorlesungsmitschriften erstellt. Es ist lediglich zur privaten Nutzung als Lernhilfe gedacht und wird für diesen Zweck unentgeltlich zur Verfügung gestellt. Daher werden weder Richtigkeit noch Vollständigkeit garantiert. Insbesondere ist das Dokument nicht von Prof. Dr. Bernold Fiedler autorisiert.

# Inhaltsverzeichnis

# 6 Differentiation im Banachraum

Vorlesung 13.10.09

## Wiederholung (Differentiation im Banachraum)

Seien $X, Y$ Banachräume und sei $U \in X$ offen. Weiterhin sei $f$ eine Abbildung $f : U \to Y$.

### Ableitung

$f$ ist (Fréchet-)differenzierbar in $x_0 \in X$, wenn für $h \to 0$ ein $A \in \mathfrak{L}(X, Y)$ (beschränkt, linear) existiert, so dass

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + A \cdot h + o(\|h\|)$$

$f'(x_0) = A \in \mathfrak{L}(X, Y)$ ist die beste lineare Approximation an $f$ in $x_0$.
Wir legen noch folgende Schreibweise fest:

$$\mathcal{C}^1(U, Y) = \{f : U \to Y \mid f \text{ ist stetig differenzierbar auf } U\}$$

### Kettenregel

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

### Schrankensatz

Sei $f$ stetig differenzierbar auf $[a, b]$. Dann gilt

$$\|f(a) - f(b)\|_Y \leq \max_{x \in [a,b]} \left\|f'(x)\right\|_{\mathfrak{L}(X,Y)} \cdot \|b - a\|_X$$

### Inverse

Sei $f \in \mathcal{C}^1$, $y_0 = f(x_0)$ und $f'(x_0) \in \mathcal{L}(X, Y)$ beschränkt invertierbar. Dann ist $f$ *lokal invertierbar*, d.h. es existiert $U \ni x_0$, so dass $f : U \to f(U)$ bijektiv und die Inverse stetig differenzierbar ist, also $f^{-1} \in \mathcal{C}^1$. Außerdem gilt dann:

$$(f^{-1})'(y_0) = (f'(x_0))^{-1}$$

Das heißt, dass $f$ ein *lokaler Diffeomorphismus* ist.

### Implizit definierte Funktionen

Sei $f : \Lambda \times X \to Y$, $f \in \mathcal{C}^1$, $f(\lambda_0, x_0) = 0$, $\mathcal{D}_x f(\lambda_0, x_0)$ beschränkt invertierbar und außerdem $x(\cdot) \in \mathcal{C}^1(\Lambda, X)$. Dann gilt in geeigneter Umgebung von $(\lambda, x)$:

$$f(\lambda, x) = 0 \iff x = x(\lambda)$$

Wegen

$$0 = (f(\lambda, x(\lambda)))' = f_\lambda(\lambda, x(\lambda)) + f_x(\lambda, x(\lambda)) \cdot x'(\lambda)$$

gilt dann

$$x'(\lambda) = -(f_x(\lambda, x(\lambda)))^{-1} \cdot f_\lambda(\lambda, x(\lambda))$$

### Partielle Ableitungen

Bzw. Gateaux- oder Richtungsableitungen. Sei $e \in X$, $\|e\| = 1$.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x_0 + t \cdot e)\bigg|_{t=0} = \mathcal{D}_e f(x_0) = \partial_e f(x_0)$$

Laut Satz gilt für die beiden Arten der Differenzierbarkeit:

(i) Fréchet $\Longrightarrow$ Gateaux

(ii) Gateaux + Richtungsableitungen definieren einen beschränkten linearen Operator, der stetig von $x_0$ abhängt $\Longrightarrow$ Fréchet ($f \in \mathcal{C}^1$)

**Speziallfälle:**

(i) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$f' = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1 & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_m & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_m \end{pmatrix} \in M(m \times n; \mathbb{R}) \qquad \text{(Jacobi-Matrix)}$$

(ii) $m = 1$

$$f' = \nabla f \qquad \text{(Gradient)}$$

(iii) $n = m$

$$\begin{aligned} \det f' & \qquad \text{(Jacobi-Determinante)} \\ \mathsf{spur} f' & \qquad \text{(Divergenz)} \end{aligned}$$

## 6.5 Höhere Ableitungen

### 6.5.1 (Multi-)lineare Algebra

**Erinnerung:**

(a) Seien X,Y Banchräume. Dann ist

$$\mathfrak{L}(X,Y) = \{A : X \to Y \mid A \text{ beschränkt und linear}\}$$

wieder ein Banachraum mit der Norm

$$\|A\|_{\mathfrak{L}(X,Y)} = \sup_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_Y = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}$$

Außerdem gilt

$$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

(b) Seien X,Y,Z Banachräume. Dann ist

$$\mathfrak{L}(X,Y;Z) = \{B : X \times Y \to Z \mid B \text{ beschränkt und bilinear}\}$$

auch ein Banachraum mit der Norm

$$\|B\|_{\mathfrak{L}(X,Y;Z)} = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y\|=1}} \|B[x,y]\|_Z < \infty$$

(c) Multilinearformen
Für $X_1, \ldots, X_n, Y$ Banachräume ist auch

$$\mathfrak{L}(X_1, \ldots, X_n; Y) = \{B : X_1 \times \ldots \times X_n \to Y \mid B \text{ beschränkt und multilinear}\}$$

einer mit

$$\|B\|_{\mathfrak{L}(X_1,\ldots,X_n;Y)} = \sup_{\substack{\|x_1\|=1 \\ \vdots \\ \|x_n\|=1}}$$

Es gilt stets: beschränkt $\Longleftrightarrow$ stetig

**Satz 6.5.1.** *Seien $X, Y, Z$ Banachräume. Dann definiert*

$$\mathfrak{L}(X,Y;Z) \to \mathfrak{L}(X, \mathfrak{L}(Y,Z)) \quad \textit{mit} \quad B \mapsto \tilde{B} \quad \textit{und} \quad (\tilde{B}x)y := B[x,y]$$

*einen (linearen) Isomorphismus, der außerdem die Norm erhält, d.h.*

$$\left\|\tilde{B}\right\|_{\mathfrak{L}(X,\mathfrak{L}(Y,Z))} = \|B\|_{\mathfrak{L}(X,Y;Z)}$$

*Kurz:*

$$\mathfrak{L}(X,Y;Z) = \mathfrak{L}(X, \mathfrak{L}(Y,Z))$$

**Beweis:**

(i) Linearität (und korrekte Räume) trivial

(ii) Bijektivität
$$B[x,y] = (\tilde{B}x)y$$

(iii) Normen
$$\begin{aligned}
\left\|\tilde{B}\right\|_{\mathfrak{L}(X,\mathfrak{L}(Y,Z))} &= \sup_{\|x\|_X=1} \left\|\tilde{B}x\right\|_{\mathfrak{L}(Y,Z)} \\
&= \sup_{\|x\|_X=1} \left( \sup_{\|y\|_Y=1} \left\|(\tilde{B}x)y\right\|_Z \right) \\
&= \sup_{\|x\|_X=1} \left( \sup_{\|y\|_Y=1} \|B[x,y]\|_Z \right) \\
&\overset{!}{=} \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y\|=1}} \|B[x,y]\|_Z \\
&= \|B\|_{\mathfrak{L}(X,Y;Z)}
\end{aligned}$$

□

**Korollar 6.5.2.** *Für $X_1, \ldots, X_n, Y$ Banachräume ist*
$$\mathfrak{L}(X_1, \ldots, X_n; Y) \cong \mathfrak{L}(X_1, \mathfrak{L}(X_2, \ldots, \mathfrak{L}(X_n, Y) \ldots))$$

**Beweis:** durch Induktion.
Induktionsanfang $n = 2$, hierfür gilt der Satz.
Induktionsschritt $(n-1) \longrightarrow n$
$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}(X_1, \ldots, X_n; Y) &\underset{\text{Satz}}{\cong} \mathfrak{L}(X_1, \ldots, X_{n-1}; \mathfrak{L}(X_n, Y)) \\
&\overset{\text{Ind.}}{=} \mathfrak{L}(X_1, \mathfrak{L}(X_2, \ldots, \mathfrak{L}(X_n, Y) \ldots))
\end{aligned}$$

□

**Beispiel.** $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$, $Z = \mathbb{R}$
$$B \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m; \mathbb{R}) \cong M(m \times n; \mathbb{R})$$
$$B[x,y] = x^T B y$$

### 6.5.2 Zweite Ableitung

**Definition 6.5.3.** Seien $X, Y$ Banachräume, $U \subseteq X$ offen und $f : U \to Y$. $f$ heißt ***zweimal differenzierbar in*** $x_0 \in U$, falls $f$ in einer Umgebung $V \subseteq U$ von $x_0$ differenzierbar ist und $f' : V \to \mathfrak{L}(X, Y)$ differenzierbar in $x_0$ ist. Wir schreiben

$$f''(x_0) = \mathcal{D}^2 f(x_0) := (f')'(x_0) \in \mathfrak{L}(X, \mathfrak{L}(X, Y)) \cong \mathfrak{L}(X, X; Y)$$

Falls $x_0 \mapsto f''(x_0) \in \mathfrak{L}(X, X; Y)$ stetig ist, schreiben wir $f \in \mathcal{C}^2$.

**Satz 6.5.4.** *Sei $f \in \mathcal{C}^1$ und existiere $f''(x_0)$ wie oben. Dann gilt für $h \to 0$ (in $X$):* Vorlesung 15.10.09

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + \frac{1}{2} \cdot f''(x_0)[h, h] + \underbrace{o(\|h\|^2)}_{g(h)}$$

*Also erhalten wir die beste quadratische Approximation an $f$.*

**Beweis:**

$$\begin{aligned}
f(x_0 + h) - f(x_0) &= \int_0^1 \underbrace{f'(x_0 + t \cdot h) \cdot h}_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x_0 + t \cdot h)} \,\mathrm{d}t \qquad \text{(Kettenregel und Hauptsatz)} \\
&\overset{\text{Def.}}{\underset{\text{1. Abl.}}{=}} \int_0^1 \left( \underbrace{f'(x_0)}_{\mathfrak{L}(X,Y)} + \underbrace{(f'(x_0))'}_{\mathfrak{L}(X,X;Y)} \cdot th + o(\|th\|) \right) \cdot h \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \big( f'(x_0) \cdot h + f''(x_0)[th, h] + h \cdot o(\|th\|) \big) \,\mathrm{d}t \\
&= f'(x_0) \cdot h + f''(x_0)[h, h] \cdot \underbrace{\int_0^1 t \,\mathrm{d}t}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{h \cdot \int_0^1 \underbrace{o(\|th\|)}_{o(\|h\|)} \,\mathrm{d}t}_{o(\|h\|^2)}
\end{aligned}$$

□

**Beispiel.** Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \frac{1}{2} x^T A x$. Sei weiterhin $A \in M(n \times n; \mathbb{R})$ und $A = A^T$.

$$\begin{aligned}
f'(x) \cdot h &= \frac{1}{2}(h^T A x + x^T A h) = x^T A h \\
f'(x) &= x^T A \\
f''(x) \cdot h &= h^T A = Ah \\
f''(x) &= A \\
f''(x)[h, h] &= h^T A h \\
\frac{1}{2}(x_0 + h)^T A (x_0 + h) &= \frac{1}{2} x_0^T A x_0 + x_0^T A h + \frac{1}{2} h^T A h \quad \text{(Restterm = 0)}
\end{aligned}$$

$$A \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n; \mathbb{R}) \cong \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})) = A \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$

**Definition 6.5.5.** Seien $X, Y$ Banachräume, $U \subset X$ offen, $x_0 \in U$ und $f : U \to Y$. Dann heißt $f$ ***zweimal Gateaux-differenzierbar in*** $x_0$, falls für alle $x \in V \subset U$ (offene Umgebung von $x_0$) und $\xi \in X$ die Gateaux-Ableitung

$$\mathcal{D}_\xi f(x_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x_0 + \xi \cdot t)$$

existiert und diese, als Funktion von $x$, in $x_0$ Gateaux-differenzierbar ist. Also

$$\forall \xi, \eta \in X\ \exists \mathcal{D}_\eta(\mathcal{D}_\xi f)(x_0)$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x_0 + \xi \cdot t + \eta \cdot s)$$

*Bemerkung:* Fréchet $\Longrightarrow$ Gateaux

$$\mathcal{D}_\eta \mathcal{D}_\xi f(x_0) = f''(x_0)[\eta, \xi]$$

**Satz 6.5.6** ((1873) *Hermann Amandus Schwarz* (1843-1921))**.** *Sei $f$ zweimal stetig Gateaux-differenzierbar.*

$$x \mapsto \mathcal{D}_\eta(\mathcal{D}_\xi f)(x) \qquad \textit{für alle } \eta, \xi$$

*Dann können die Ableitungen vertauscht werden.*

$$\mathcal{D}_\eta \mathcal{D}_\xi f(x_0) = \mathcal{D}_\xi \mathcal{D}_\eta f(x_0)$$

**Beweis:**

(i) $\eta \parallel \xi$ trivial

(ii) OE $Y = \mathbb{R}$, $X = \mathbb{R}^2$ (schränke auf $\langle \xi, \eta \rangle$ ein)

OE $\xi = e_1$, $\eta = e_2$, $x = (x_1, x_2)$, $x_0 = 0$.

$$\begin{aligned}
\delta_1 f(x_2) &:= f(h_1, x_2) - f(0, x_2) \\
\delta_2 f(x_1) &:= f(x_1, h_2) - f(x_1, 0) \\
\delta_2(\delta_1 f) &:= \delta_1 f(h_2) - \delta_1 f(0) \\
&= f(h_1, h_2) - f(0, h_2) - f(h_1, 0) + f(0, 0) \\
&= \delta_2 f(h_1) - \delta_2 f(0) =: \delta_1(\delta_2 f)
\end{aligned}$$

Wir zeigen nun:

$$\exists \underbrace{x_i \in (0, h_i)}_{0 < x_i < h_i} \ :\ \delta_2(\delta_1 f) = \mathcal{D}_{e_1}\left(\mathcal{D}_{e_2} f(x_1, x_2)\right) h_2 h_1$$

denn:

$$\begin{aligned}
\delta_2(\delta_1 f) &\underset{\text{MWS}}{=} (\delta_1 f)'(x_2) \cdot h_2 \\
&= \left(\mathcal{D}_{e_2} f(h_1, x_2) - \mathcal{D}_{e_2} f(0, x_2)\right) h_2 \\
&\underset{\text{MWS}}{=} \mathcal{D}_{e_1}\left(\mathcal{D}_{e_2} f(x_1, x_2)\right) h_2 h_1
\end{aligned}$$

Genauso zeigen wir:

$$\exists \tilde{x}_i \in (0, h_i) \ : \ \delta_1(\delta_2 f) = \mathcal{D}_{e_2} \left( \mathcal{D}_{e_1} f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \right) h_2 h_1$$

Wir wissen nun:

$$\mathcal{D}_{e_1} \left( \mathcal{D}_{e_2} f(x_1, x_2) \right) \cancel{h_2 h_1} = \mathcal{D}_{e_2} \left( \mathcal{D}_{e_1} f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \right) \cancel{h_2 h_1}$$

Wegen Stetigkeit der Gateaux-Ableitung (die vorausgesetzt wurde) konvergieren beide Seiten für $h_1, h_2 \to 0$:

$$\mathcal{D}_{e_1} \left( \mathcal{D}_{e_2} f(0,0) \right) = \mathcal{D}_{e_2} \left( \mathcal{D}_{e_1} f(0,0) \right)$$

□

*Bemerkung:*

(i) (*Berger*: „Nonlinearity and Functional Analysis“ (2.1.17))

$f$ zweimal Fréchet-differenzierbar $\iff$ $f$ zweimal Gateaux-differenzierbar und

$$x \mapsto \mathcal{D}_\eta \mathcal{D}_x i f(x) \in \mathfrak{L}(\underbrace{X}_{\eta}, \underbrace{X}_{\xi}; Y)$$

ist stetig

(ii) (*Dieudoné* I (8.12.2))

Stets ist die zweite Fréchet-Ableitung symmetrisch bilinear:

$$\mathcal{D}^2 f(x_0)[h_1, h_2] = \mathcal{D}^2 f(x_0)[h_2, h_1]$$

(iii) Schreibweisen (für Einheitsvektoren $e_i, e_j$):

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{e_i} \mathcal{D}_{e_j} f(x_0) &= \partial_i \partial_j f(x_0) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x_0) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial x_j} f(x_0) \\
&= f_{x_i x_j}(x_0)
\end{aligned}$$

### 6.5.3 Extrema und Sattelpunkte

Sei stets $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}$.

**Definition 6.5.7.** Wir nennen $x_0$ ein ***lokales Maximum*** von $f$, wenn gilt:

$$\exists V \subseteq U \text{ (mit } x_0 \in V) \ \forall x \in V \ : \ f(x_0) \geq f(x)$$

Das lokale Maximum heißt ***strikt***, falls

$$f(x_0) > f(x) \quad \text{für} \quad x_0 \neq x$$

Analog definieren wir ein ***lokales Minimum***.
Allgemein sprechen wir von einem ***lokalen Extremum***, wenn entweder ein Minimum oder ein Maximum vorliegt.

**Satz 6.5.8** (notwendige Bedingung)**.** *Hat $f$ in $x_0$ ein lokales Extremum und ist $f$ in $x_0$ differenzierbar, so ist*

$$f'(x_0) = \mathsf{grad} f(x_0) = 0$$

**Beweis (Widerspruch):** OE gehen wir von einem Maximum aus.

$$h := \varepsilon \cdot \mathsf{grad} f(x_0) \qquad (\varepsilon \searrow 0)$$

$$\begin{aligned} f(x_0) &\geq f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + o(|h|) \\ 0 &\geq \varepsilon \cdot \underbrace{\langle \mathsf{grad} f(x_0), \mathsf{grad} f(x_0) \rangle}_{|\mathsf{grad} f(x_0)|^2} + o(|\varepsilon|) \\ 0 &\geq |\mathsf{grad} f(x_0)|^2 \qquad (\text{für } \varepsilon \to 0) \\ &\Longrightarrow \text{Widerspruch!} \end{aligned}$$

□

Vorlesung 20.10.09

**Definition 6.5.9.** Die durch $f''(x_0)$ erklärte symmetrische Matrix

$$(\mathsf{Hess} f)(x_0) := f''(x_0) = \big(\partial_{x_i} \partial_{x_j} f(x_0)\big)_{1 \leq i,j \leq n}$$

heißt ***Hesse-Matrix*** von $f$ in $x_0$.

*Bemerkung:* Die Spur der Hesse-Matrix heißt auch ***Laplace-Operator***.

$$\triangle f(x_0) = \mathsf{spur}(\mathsf{Hess} f)(x_0) = \left(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \ldots + \partial_{x_n}^2\right) f(x_0)$$

*Erinnerung:* Sei $A \in M(n \times n; \mathbb{R})$.

- *quadratische Form:*

$$\begin{gathered} Q(x) = x^T A x \\ \text{(strikt) positiv definit} \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus 0 \ : \ Q(x) > 0 \\ \text{(strikt) negativ definit} \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus 0 \ : \ Q(x) < 0 \\ \text{indefinit, falls beide Vorzeichen angenommen werden} \end{gathered}$$

- *orthogonale Diagonalisierung:* Es existiert eine orthogonale Matrix $S$ ($S^T S = \mathsf{id}$), so dass
$$S^T A S = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$$
diagonal ist.

**Satz 6.5.10** (Trägheitssatz von *Sylvester*)**.** *Es existiert eine invertierbare Matrix $S$, so dass gilt*
$$S^T A S = \begin{pmatrix} +1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & +1 & & & & & & \\ & & & 0 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & -1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & -1 \end{pmatrix}$$
*Dabei ist*
$$\begin{aligned} \#\{+1\} &= \#\{\lambda_k > 0\} \\ \#\{0\} &= \#\{\lambda_k = 0\} \\ \#\{-1\} &= \#\{\lambda_k < 0\} \end{aligned}$$
*Außerdem gilt*
$$Q(Sx) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2 - x_q^2 - \ldots - x_n^2$$

**Definition 6.5.11.** $Q$ (bzw. $A$) heißt ***nicht entartet***, falls
$$\#\{\lambda_i = 0\} = 0$$
Außerdem nennen wir
$$m''(A) = \#\{\lambda_i > 0\}$$
den ***Morse-Index*** von $A$.

**Satz 6.5.12** (hinreichende Bedingung)**.** *Sei $f'(x_0) = 0$ und existiere $(\mathsf{Hess} f)(x_0) = f''(x_0)$ und sei diese positiv (negativ) definit. Dann hat $f$ in $x_0$ ein striktes lokales Minimum (Maximum).*

**Beweis:** OE sei $(\mathsf{Hess} f)(x_0)$ positiv definit. Wir beweisen indirekt, nehmen also an $x_0$ wäre kein striktes lokales Minimum. Dann existiert eine Folge $x_n \to x_0$ mit $x_n \neq x_0$. Wir ersetzen während der Rechnung $\eta_n = \frac{h_n}{|h_n|}$.

$$f(x_0) \geq f(x_n) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}_{=0}(x_n - x_0) + \frac{1}{2} \cdot f''(x_0)[\underbrace{x_n - x_0}_{h_n}, x_n - x_0] + o(|x_n - x_0|^2)$$

$$\begin{aligned} 0 &\geq \frac{1}{2} h_n^T \left( (\mathsf{Hess} f)(x_0) \right) h_n + o(|h_n|^2) \\ 0 &\geq \frac{1}{2} \eta_n^T \left( (\mathsf{Hess} f)(x_0) \right) \eta_n + \underbrace{o(1)}_{\text{für } n \to \infty} \end{aligned}$$

Die $\eta_n$ liegen alle auf der Einheitssphäre.

$$\eta_n \in S^{N-1} \subset \mathbb{R}^N$$

Da diese aber kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert $\eta$:

$$\begin{aligned} 0 &\geq \frac{1}{2} \cdot \eta^T \left( (\mathsf{Hess} f)(x_0) \right) \eta \\ &\implies \text{Widerspruch!} \end{aligned}$$

□

**Satz 6.5.13** (Satz von *Morse* (1925) (ohne Beweis))**.** *Sei $f \in \mathcal{C}^3$, $f'(0) = 0$ und $(\mathsf{Hess} f)(0)$ nicht entartet. Dann haben die Niveaumengen von $f$ in $\mathbb{R}^N$ lokal nahe $x = 0$ dieselbe Gestalt wie die Niveaumengen der quadratischen Form*

$$Q(x) = \frac{1}{2} \cdot x^T \left( (\mathsf{Hess} f)(x_0) \right) x$$

*Genauer: Es gibt Umgebungen $V, \tilde{V}$ von $0$ in $\mathbb{R}^N$ und einen $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus $\varphi : V \to \tilde{V}$ mit $\varphi(0) = 0$, so dass $f(x) = Q(\varphi(x))$. Das heißt die Niveaumengen erfüllen*

$$\{x \in V \mid f(x) = c\} = \varphi^{-1} \left( \{x \in \tilde{V} \mid Q(x) = c\} \right)$$

*Wir können uns sogar $\mathsf{Hess} f$ in Normalform vorstellen.*

**Beispiel.** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(\mathsf{Hess} f)(x_0) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \text{positiv definit} &\iff \mathsf{spur}(\mathsf{Hess} f) > 0, \quad \det(\mathsf{Hess} f) > 0 \\ \text{negativ definit} &\iff \mathsf{spur}(\mathsf{Hess} f) < 0, \quad \det(\mathsf{Hess} f) > 0 \\ \text{indefinit} &\iff \det(\mathsf{Hess} f) < 0 \end{aligned}$$

### 6.5.4 Extremwerte und Konvexität

**Beispiel.** (*Courant* II, ch. III 6.2.4)
gegeben: $P = \{p^{(1)}, \dots, p^{(n)}\} \subseteq \mathbb{R}^N$
gesucht: Punkt $x \in \mathbb{R}^N$ mit minimaler Abstandssumme

$$f(x) := \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left\| x - p^{(k)} \right\|_2}_{r^{(k)}}$$

$$r^{(k)} = \sqrt{\sum_{m=1}^{N} \left( x_m - p_m^{(k)} \right)^2}$$

**Definition 6.5.14.** Sei $X$ ein Banachraum. $\Omega \subseteq X$ heißt ***konvex***, falls

$$\begin{aligned} \forall a, b \in \Omega \ : \ [a,b] &:= \{a + \lambda(b-a) \mid 0 \leq \lambda \leq 1\} \\ &= \{(1-\lambda)a + \lambda b \mid 0 \leq \lambda \leq 1\} \subseteq \Omega \end{aligned}$$

*Bemerkung:* Von dieser Definition ausgehend können wir für beliebige Mengen den Begriff der ***konvexen Hülle*** einführen.

$$\mathsf{conv}(P) := \bigcap_{\tilde{\Omega} \supseteq P;\ \tilde{\Omega} \text{ konvex}} \tilde{\Omega} \qquad \text{kleinste konvexe Menge, die } P \text{ enthält}$$

Falls $P \subseteq \mathbb{R}^N$, können wir sogar sagen:

$$\mathsf{conv}(P) = \bigcap_{\tilde{\Omega} \supseteq P;\ \tilde{\Omega} \text{ alg. Halbraum}} \tilde{\Omega}$$

$$\text{Halbraum} = \{x \mid e^T x \geq c\}$$

$$\mathsf{conv}(P) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} t^{(k)} p^{(k)} \ \middle| \ 0 \leq t^{(k)} \leq 1;\ \sum_{k=1}^{n} t^{(k)} = 1 \right\}$$

**Definition 6.5.15.** Sei $X$ Banachraum und $\Omega \subseteq X$ konvex. Die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt ***konvex***, wenn

$$\mathsf{epigraph} f := \{(x,y) \in \Omega \times \mathbb{R} \mid y \geq f(x)\}$$

konvex ist, d.h.

$$\forall a, b \in \Omega \text{ und } 0 \leq \lambda \leq 1 \ : \ f((1-\lambda)a + \lambda b) \leq (1-\lambda) f(a) + \lambda f(b)$$

$f$ heißt ***strikt konvex***, wenn für $0 < \lambda < 1$ und $a \neq b$ gilt:

$$f((1-\lambda)a + \lambda b) < (1-\lambda) f(a) + \lambda f(b)$$

**Satz 6.5.16.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ konvex und kompakt und sei weiterhin $f : \Omega \to \mathbb{R}$ strikt konvex und stetig. Dann existiert ein eindeutiges Minimum, d.h.*

$$\exists! x_0 \in \Omega \ : \ f(x_0) = \min_{x \in \Omega} f(x)$$

**Beweis:** Die Existenz folgt aus der Regel $f(\text{kompakt}) = \text{kompakt}$.
Die Eindeutigkeit zeigen wir indirekt, nehmen also an es gäbe zwei:

$$\begin{aligned} & f(x_0) = f(x_1) = \min_{x\in\Omega} f(x) \\ & \Longrightarrow \min_{x\in\Omega} f(x) = \frac{1}{2} \cdot f(x_0) + \frac{1}{2} \cdot f(x_1) > f(\frac{1}{2} \cdot (x_0) + \frac{1}{2} \cdot (x_1)) \geq \min_{x\in\Omega} f(x) \\ & \Longrightarrow \text{Widerspruch!} \end{aligned}$$

□

Vorlesung 22.10.09

**Proposition 6.5.17** (Kettenregel). *Seien $X, Y, Z$ Banachräume und $U \subseteq X$ sowie $V \subseteq Y$ offen. Seien weiterhin $g : U \to V$ in $x_0 \in U$ und $f : V \to Z$ in $y_0 = g(x_0) \in V$ zweimal Fréchet-differenzierbar. Dann gilt*

$$\underbrace{(f \circ g)''(x_0)}_{\mathfrak{L}(X,X;Z)}[\underbrace{\ \xi\ }_{\in X}, \underbrace{\ \eta\ }_{\in X}] = f''(g(x_0)) \left[g'(x_0)\xi, g'(x_0)\eta\right] + f'(g(x_0))g''(x_0)[\xi, \eta]$$

*Kurzschreibweise:*

$$(f \circ g)'' = f'' \left(g'\right)^2 + f'g''$$

**Beweis:**

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(x_0)\eta &= \underbrace{f'(g(x_0))}_{\mathfrak{L}(Y,Z)} \cdot \underbrace{g'(x_0)}_{\mathfrak{L}(X,Y)} \eta \\ (f \circ g)''(x_0)[\xi, \eta] &= \underbrace{f''(g(x_0))}_{\mathfrak{L}(Y;\mathfrak{L}(Y,Z))} [\underbrace{g'(x_0)\xi}_{Y}, g'(x_0)\eta] + f'(g(x_0))g''(x_0)[\xi, \eta] \end{aligned}$$

□

**Satz 6.5.18.** *Sei $X$ Banachraum und $\Omega \subset X$ konvex. Sei weiterhin $f : \Omega \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und es gelte $\forall x \in \Omega \ : \ f''(x) \geq 0$, d.h. positiv semidefinit. Dann ist $f$ konvex.*
*Falls $f''(x) > 0$ (strikt) positiv definit ist, so ist $f$ strikt konvex.*

**Beweis:** Seien $a, b \in \Omega$ mit $a \neq b$. Setze $g : [0, 1] \to \Omega$ als

$$g(t) := ta + (1 - t)b$$

und außerdem $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ als

$$\varphi(t) := (f \circ g)(t)$$

Wegen $g'' \equiv 0$ folgt

$$\begin{aligned}
\varphi''(t) &= f''\left(g'\right)^2 \\
&= \underbrace{\underbrace{f''(g(t))}_{\mathfrak{L}(X,X;\mathbb{R})}[a-b,a-b]}_{\mathbb{R}} \geq 0
\end{aligned}$$

Das Problem wird also auf die reelle Achse zurückgeführt. □

**Beispiel** (Abstandsumme)**.**

$$\begin{aligned}
P &= \left\{p^{(1)},\dots,p^{(n)}\right\} \subseteq \mathbb{R}^N \\
f(x) &= \sum_{k=1}^{n} \left\|x - p^{(k)}\right\|_2 \\
r^{(k)}(x) &= \left\|x - p^{(k)}\right\|_2 = \sqrt{\sum_{l=1}^{N} \left(x_l - p_l^{(k)}\right)^2}
\end{aligned}$$

Klar ist, dass die Suche auf $\Omega = \mathsf{conv}(P)$ eingeschränkt werden kann. Da diese Menge kompakt ist, existiert ein Minimum.
Zuerst bestimmen wir die erste Ableitung:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_l}\left(r^{(k)}\right)(x) &= \frac{1}{\cancel{2}\cdot r^{(k)}(x)} \cdot \cancel{2}\left(x_l - p_l^{(k)}\right) \\
\nabla r^{(k)}(x) &= \left(r^{(k)\prime}\right)(x) \\
&= \frac{x - p^{(k)}}{\left\|x - p^{(k)}\right\|_2} = \left(e^{(k)}\right)^T \\
&\implies \text{Einheitsvektor von } p^{(k)} \text{ nach } x
\end{aligned}$$

Zweite Ableitung (benutze $\frac{x_m - p_m^{(k)}}{r^{(k)}(x)} = e_m^{(k)}$):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_m}\frac{\partial}{\partial x_l}\left(r^{(k)}\right)(x) &= \frac{1}{\left[r^{(k)}(x)\right]^2} \cdot \left(\delta_l^m r^{(k)} - \left(x_l - p_l^{(k)}\right)\cdot e_m^{(k)}\right) \\
\left(r^{(k)\prime\prime}\right)(x) &= \frac{1}{r^{(k)}}\left(\mathsf{id} - e^{(k)}\left(e^{(k)}\right)^T\right) \\
&= \frac{1}{r^{(k)}}\underbrace{\left(\mathsf{id} - P^{(k)}\right)}_{Q^{(k)}} \\
&\implies Q^{(k)} \text{ ist orthogonale Projektion auf } \left\langle e^{(k)}\right\rangle^T
\end{aligned}$$

Nun bleibt noch zu prüfen, ob $f''$ positiv definit ist. Wir setzen voraus, dass $x \notin P$. Fassen wir $f''$ als Matrix auf, dann ist $f''(x)\xi$ Projektion von $\xi$ auf $\underset{k}{\mathsf{span}} \left\langle e^{(k)} \right\rangle^T$.

$$\begin{aligned} f''(x)[\xi,\xi] &= \xi^T \left(f''(x)\right) \xi \\ &= \xi^T \left( \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{r^{(k)}} \, Q^{(k)} \right) \xi \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{r^{(k)}} \left\| Q^{(k)} \xi \right\|_2^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Also ist $f$ konvex.

$$\begin{aligned} f''(x)[\xi,\xi] = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall k \ : \ Q^{(k)}\xi = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall k \ : \ \xi \parallel e^{(k)} \end{aligned}$$

Dies ist nur möglich, wenn ein $x$ existiert, so dass alle $e^{(k)}$ parallel sind. Dann müssten aber alle $p^k$ kolinear sein. Sind sie es nicht, so ist $f''(x) > 0$ für $x \notin P$. Da also $P$ endlich und nicht kolinear ist, muss $f$ strikt konvex sein. Darum existiert ein eindeutiges Minimum.
*Konkret:* Betrachte dasDreieck $P = \{p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}\}$. Notwendig ist:

$$e^{(1)} + e^{(2)} + e^{(3)} = 0 \quad \text{oder} \quad x \in P$$

Sind alle Innenwinkel kleiner als 120°, so liegt das Minimum im Schnittpunkt der 120°-Kreise, sonst in der stumpfen Ecke.

### 6.5.5 Extrema und Nebenbedingungen

Vorlesung 27.10.09

**Satz 6.5.19.** *Sei $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^K$ lokal nahe $z_0 \in \mathbb{R}^N$ eine $\mathcal{C}^1$-Funktion. Weiter sei $z_0$ ein lokales Extremum der Funktion $f$ mit der Nebenbedingung $g(z) = 0 \in \mathbb{R}^K$, wobei $z \in (\{z \ : \ g(z) = 0\} \cap U_\varepsilon(z_0))$. Sei außerdem $\mathcal{D}g(z_0)$ surjektiv (insbesondere $K \leq N$). Dann gilt*

$$\nabla f(z_0) \perp \mathsf{kern}\ \mathcal{D}g(z_0)$$

*oder äquivalent:*

*$\nabla f(z_0)$ ist eine Linearkombination der Zeilen der Jakobi-Matrix von $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_k \end{pmatrix}$, d.h.:*

$$\nabla f(z_0) = \sum_{m=1}^{k} \lambda_m \cdot \nabla g_m$$

**Beweis:** Wähle orthogonale Koordinaten $z = (x,y) \in \mathbb{R}^{N-K} \times \mathbb{R}^K$ mit

$$\mathsf{span}\left\langle (\xi, 0) \right\rangle = \mathsf{kern}\ \mathcal{D}g(z_0)$$

Dann ist $\mathcal{D}g(z_0) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^K$ auf $\{(0,y) \,|\, y \in \mathbb{R}^K\} \cong 0 \times \mathbb{R}^K$ invertierbar, also ist auch $\mathcal{D}_y g(z_0) : \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^K$ invertierbar. Darum ist nahe $z_0 = (x_0, y_0)$:

$$\begin{aligned} g(x,y) = 0 \Longleftrightarrow y = y(x) \text{ mit } 0 &= \mathcal{D}_x g(x_0, y(x_0)) + \mathcal{D}_y g(x_0, y(x_0)) \mathcal{D}y(x_0) \\ \mathcal{D}y(x_0) &= -\left[\mathcal{D}_y g(x_0, y(x_0))\right]^{-1} \underbrace{\mathcal{D}_x g(x_0, y(x_0))}_{0} = 0 \end{aligned}$$

Setze

$$\varphi(x) := f(x, y(x)) : \mathbb{R}^{N-K} \cap U_\varepsilon(x_0) \to \mathbb{R}$$

Dann hat $\varphi$ in $x_0$ ein lokales Extremum (ohne Nebenbedingung). Also

$$0 = \nabla\varphi(x_0) = \mathcal{D}_x f(x_0, y(x_0)) + \underbrace{\mathcal{D}_y f(x_0, y(x_0)) \mathcal{D}y(x_0)}_{0}$$

Wähle nun $(\xi, \eta)^T \in \mathsf{kern}\ \mathcal{D}g(z_0)$, d.h. $\eta = 0$.

$$\nabla f(z_0) \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \nabla f(z_0) \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} = \mathcal{D}_x f(z_0) \eta = 0$$

Also ist

$$\nabla f(z_0) \perp \mathsf{kern}\ \mathcal{D}g(z_0)$$

□

*Erinnerung* (Lineare Algebra):

$$\begin{aligned} (\mathsf{kern} A)^\perp &= \mathsf{bild} A^T \\ &= \text{Linearkombination der Zeilen von } A \\ \xi^T A \eta &= \eta^T A^T \xi \\ \eta \in \mathsf{kern} A \Longrightarrow \forall \xi \ : \ 0 = \xi^T A \eta &= \eta^T \underbrace{A^T \xi} \Longrightarrow \eta \perp \mathsf{bild} A^T \end{aligned}$$

**Beispiel.** Seien $f, g$ quadratische Formen, $A, B$ symmetrische $N \times N$-Matrizen und $c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(z) &= z^T A z \\ g(z) &= z^T B z - c \end{aligned}$$

Gesucht sind also die Extremwerte einer quadratischen Form auf einer Niveaufläche einer anderen quadratischen Form.
*Voraussetzung:*

- $g'(z_0) \neq 0$ d.h. $z_0 \notin \mathsf{kern} B$
- $f(z_0)$ ist ein lokales Extremum auf $\{z \mid z^T B z = 0\}$.

*Folgerung:*

$$\begin{aligned} \exists \lambda \in \mathbb{R} \ : \ \nabla f(z_0) &= \lambda \nabla g(z_0) \\ z_0^T A &= \lambda z_0^T B \\ A z_0 &= \lambda B z_0 \end{aligned}$$

*Konkreter für* $B = \mathsf{id}$:

$$g(z) = z^T z - c = \|z\|_2^2 - c$$

Dann ist die Menge $\{z \mid z^T B z = 0\}$ die $(N-1)$-Sphäre mit Radius $\sqrt{c}$, $c > 0$. Die Extremwerte von $f$ sind Eigenvektoren der Matrix $A$. Sei $z_0$ Eigenvektor und $\lambda$ der zugehörige Eigenwert. Dann ist

$$f(z_0) = z_0^T A z_0 = z_0^T \lambda \cdot z_0 = \lambda \cdot \|z_0\|_2^2$$

*Bemerkung:*

(i) Alle Eigenvektoren von $A$ liefern kritische Punkte (i.A. Sattelpunkte).

(ii) Maximum und Minimum sind durch den maximalen bzw. minimalen Eigenwert bestimmt.

### 6.5.6 Taylor-Entwicklung

Seien stets $X, Y$ Banachräume, $U \subseteq X$ offen, $x_0 \in U$ und $f : U \to Y$ eine Abbildung.

**Definition 6.5.20.** Die ***n-te (Fréchet-)Ableitung*** $f^{(n)}(x_0) = \mathcal{D}^n f(x_0)$ ist rekursiv definiert als die Linearisierung der $(n-1)$-ten Ableitung in einer Umgebung von $x_0$:

$$f^{(n)}(x_0) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x_0)$$

Für die Räume gilt dann:

$$f^{(n)}(x_0) \in \underbrace{\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, \dots, \mathcal{L}}_{n\text{-mal}}(X, Y))) \cong \mathcal{L}(\underbrace{X, X, \dots, X}_{n\text{-mal}}; Y) \cong \mathcal{L}^n(X, Y)$$

$\mathcal{C}^n(U, Y)$ bezeichnet dann den Raum der $n$-mal differenzierbaren Abbildungen mit stetiger $n$-ter Ableitung.

**Definition 6.5.21.** Als ***n-te Gateaux-Ableitung*** ergibt sich entsprechend

$$\mathcal{D}_{\xi_1} \mathcal{D}_{\xi_2} \dots \mathcal{D}_{\xi_n} f(x_0) \quad \text{für } \xi_1, \dots, \xi_n \in X$$

*Bemerkung:*

(i) Fréchet $\Longrightarrow$ Gateaux

$$\mathcal{D}_{\xi_1} \mathcal{D}_{\xi_2} \dots \mathcal{D}_{\xi_n} f(x_0) = \mathcal{D}^n f(x_0)\,[\xi_1, \dots, \xi_n]$$

(ii) Gateaux, multilineare Beschränktheit und Stetigkeit in $x_0 \Longrightarrow$ Fréchet, $\mathcal{C}^n$

(iii) Fréchet oder Gateaux + Stetigkeit $\Longrightarrow$ Symmetrie
Dies bedeutet, dass die Reihenfolge der partiellen (Gateaux-)Ableitungen egal ist bzw., für $\mathcal{D}^n f(x_0)$, dass für jede Permutation $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ gilt:

$$\mathcal{D}^n f(x_0)\,[\xi_1, \ldots, \xi_n] = \mathcal{D}^n f(x_0)\,\left[\xi_{\pi(1)}, \ldots, \xi_{\pi(n)}\right]$$

Zum Erhalt der Lesbarkeit vereinbaren wir, unter der Voraussetzung, dass

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}_0^N$$

folgende Notationen:

$$\begin{aligned}
|\alpha| &= \alpha_1 + \ldots + \alpha_N \\
\alpha! &= \alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_N! \\
\mathcal{D}^\alpha &= \mathcal{D}_1^{\alpha_1} \ldots \mathcal{D}_N^{\alpha_N} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_N}^{\alpha_N}} \\
\text{mit } \mathcal{D}_k^{\alpha_k} &= \underbrace{\mathcal{D}_k \ldots \mathcal{D}_k}_{\alpha_k\text{-mal}} \\
x^\alpha &= x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_N^{\alpha_N} \qquad \left(x \in \mathbb{R}^N\right) \\
\xi^{(n)} &= \underbrace{[\xi, \ldots, \xi]}_{n\text{-mal}}
\end{aligned}$$

*Bemerkung:* Vorlesung 29.10.09

(i) Sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ gegeben. Dann gilt:

$$\mathcal{D}_{k_1} \ldots \mathcal{D}_{k_m} = \mathcal{D}^\alpha \Longleftrightarrow |\alpha| = m$$

und die $m$-Tupel $\underline{k} = (k_1, \ldots, k_m)$ enthalten $j$ genau $a_j$-mal. Die Anzahl solcher $m$-Tupel $\underline{k}$ zu gegebenem $\alpha$ beträgt $\frac{m!}{\alpha!}$.

(ii)

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) h^{(n)} = \sum_{|\alpha|=n} \frac{1}{\alpha!} \mathcal{D}^\alpha f(x_0) h^\alpha$$

denn:

$$
\begin{aligned}
\underline{i} &= (i_1, \dots, i_n) \in \{1, \dots, N\}^n \\
h &= \sum_i h_i e_i \\
f^{(n)}(x_0)h^{(n)} &= f^{(n)}(x_0)[h, \dots, h] \\
&= f^{(n)}(x_0)\left[\sum_{i_1=1}^{N} h_{i_1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i_n=1}^{N} h_{i_n} e_{i_n}\right] \\
&= \sum_{\underline{i}} f^{(n)}(x_0)\left[e_{i_1}, \dots, e_{i_n}\right] \cdot h_{i_1} \cdot \ldots \cdot h_{i_n} \\
&= \sum_{\underline{i}} \mathcal{D}_{i_1} \dots \mathcal{D}_{i_n} f(x_0) \cdot h_{i_1} \cdot \ldots \cdot h_{i_n} \\
&= \sum_{|\alpha|=n} \frac{n!}{\alpha!} \mathcal{D}^\alpha f(x_0) \cdot h^\alpha
\end{aligned}
$$

**Satz 6.5.22.** *Seien $X, Y$ Banchräume, $x_0, h \in X$ und $x_\tau := x_0 + \tau \cdot h$. Sei außerdem $f : X \to Y$ aus $\mathcal{C}^{n+1}$ in Umgebung der Strecke $S := \{x_\tau \mid 0 \leq \tau \leq 1\}$. Dann gilt die Taylorformel:*

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\ f^{(k)}(x_0)h^{(k)} + R_{n+1}(x_0, h)$$

*mit Restglied*

$$R_{n+1}(x_0, h) := \frac{1}{n!} \cdot \int_0^1 (1-\tau)^n \cdot f^{(n+1)}(x_\tau)h^{(n+1)}\ \mathrm{d}\tau$$

**Beweis:** Wir erinnern uns an $g \in \mathcal{C}^{n+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$g(t) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot g^{(k)}(0)t^k\right) + \underbrace{\frac{1}{n!} \cdot \int_0^t (t-\tau)^n \cdot g^{(n+1)}(\tau)\ \mathrm{d}\tau}_{R_{n+1}(0,t)}$$

$$R_{n+1}(0, t) = \frac{1}{n!} \cdot \Big[(t-\tau)^n \cdot g^{(n)}(\tau)\Big]_0^t + \frac{n}{n!} \cdot \int_0^t (t-\tau)^{n-1} \cdot g^{(n)}(\tau)\ \mathrm{d}\tau$$

Setze $t = 1$ und $g(\tau) := f(x_\tau) = f(x_0 + \tau \cdot h)$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
g'(\tau) &= f'(x_\tau)h \\
g''(\tau) &= f''(x_\tau)h^{(2)} \\
&\ \vdots \\
g^{(n+1)}(\tau) &= f^{(n+1)}(x_\tau)h^{(n+1)}
\end{aligned}
$$

Einsetzen und fertig. □

*Bemerkung:*

(i) Sei $X = \mathbb{R}^N$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$. Dann lautet die Taylorformel

$$f(x_0+h) = \left( \sum_{|\alpha|\le n} \frac{1}{\alpha!}\, \mathcal{D}^\alpha f(x_0) h^\alpha \right) + R_{n+1}(x_0,h)$$

Denn es gilt ja

$$\frac{1}{m!} \cdot f^{(m)}(x_0)h^{(m)} = \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!}\, \mathcal{D}^\alpha f(x_0)h^\alpha$$
$$f(x_0+h) = \left( \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} \cdot f^{(m)}(x_0)h^{(m)} \right) + R_{n+1}(x_0,h)$$

(ii) Implizite Funktionen. Es sei $F(\lambda_0,x_0)=0$ und $\mathcal{D}_x F(\lambda_0,x_0)^{-1}$ existiere. Dann gilt

$$F(\lambda,x)=0 \underset{\text{lokal}}{\iff} x = x(\lambda)$$
$$x'(\lambda) = -\,\mathcal{D}_x F(\lambda, x(\lambda))^{-1} \mathcal{D}_\lambda F(\lambda, x(\lambda))$$

Ebenso gilt:

$$F \in \mathcal{C}^n \implies (\lambda \mapsto x(\lambda)) \in \mathcal{C}^n$$

Denn: Induktion nach $n$. $n=1$ ist klar. Gelte die Behauptung schon für $n-1$, also

$$F \in \mathcal{C}^{n-1} \implies (\lambda \mapsto x(\lambda)) \in \mathcal{C}^{n-1}$$

Dann gilt für $F \in \mathcal{C}^n$ und $x(\cdot) \in \mathcal{C}^{n-1}$ per Kettenregel

$$x'(\lambda) = -\,\underbrace{\underbrace{\mathcal{D}_x F(\lambda, \underbrace{x(\lambda)}_{\mathcal{C}^{n-1}})^{-1}}_{\mathcal{C}^{n-1}} \underbrace{\mathcal{D}_\lambda F(\lambda, \underbrace{x(\lambda)}_{\mathcal{C}^{n-1}})}_{\mathcal{C}^{n-1}}}_{\mathcal{C}^{n-1}}$$

Also

$$x'(\cdot) \in \mathcal{C}^{n-1} \implies x(\cdot) \in \mathcal{C}^n$$

(iii) Konvergenz der Taylorreihe, etwa wenn der Restterm $R_{n+1}(x_0,h)$ für $|h| \le r$ gleichmäßig gegen Null geht für $n \to \infty$. Dann konvergiert auch die Taylorreihe gleichmäßig in dieser Umgebung und stellt die Funktion $f$ dar:

$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot f^{(k)}(x_0)h^{(k)}$$

## 6.6 Beispiel: Torus zeichnen

$$\Phi(\lambda,\alpha,\beta) := \underbrace{\begin{pmatrix}\cos\lambda & 0 & -\sin\lambda\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\lambda & 0 & \cos\lambda\end{pmatrix}}_{R} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}_{S} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}1 + r\cdot\cos\beta\\ 0\\ r\cdot\sin\beta\end{pmatrix}}_{v}$$

Vorlesung 03.11.09 $v$ ist ein Kreis in der $xz$-Ebene um $(1\ 0\ 0)^T$ mit Radius $r$. $S$ dreht diesen Kreis um die $z$-Achse. Der so enstandene Torus („Donut“) wird durch $R$ mit Winkel $\lambda$ um die $y$-Achse gedreht. *Ziel:* Zeichne die Projektion $P$ des so konstruierten ($\alpha, \beta \bmod 2\pi$) und gekippten ($0 \leq \lambda < \frac{\pi}{2}$) 2-Torus $T^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ in die $xy$-Ebene.

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda,\alpha,\beta) &= \begin{pmatrix}\cos\lambda & 0 & -\sin\lambda\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\lambda & 0 & \cos\lambda\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}(1 + r\cdot\cos\beta)\cdot\cos\alpha\\ (1 + r\cdot\cos\beta)\cdot\sin\alpha\\ r\cdot\sin\beta\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\cos\lambda\cdot(1 + r\cdot\cos\beta)\cdot\cos\alpha - r\cdot\sin\lambda\cdot\sin\beta\\ (1 + r\cdot\cos\beta)\cdot\sin\alpha\\ \sin\lambda\cdot(1 + r\cdot\cos\beta)\cdot\cos\alpha + r\cdot\cos\lambda\cdot\sin\beta\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\\ \Phi_3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Uns interessiert die $2D$-Projektion in die $xy$-Ebene:

$$\varphi(\lambda,\alpha,\beta) := P\Phi(\lambda,\alpha,\beta) = \begin{pmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\end{pmatrix}(\lambda,\alpha,\beta)$$

Wir zeichnen eigentlich Ränder des projizierten Bildes

$$\left\{\varphi(\lambda,\alpha,\beta)\ \middle|\ \alpha,\beta \in S^1\right\}$$

Betrachte die Jacobi-Determinante

$$\det\left(\mathcal{D}_{(\alpha,\beta)}\varphi(\lambda,\alpha,\beta)\right) = \det\left.\begin{pmatrix}\partial_\alpha\Phi_1 & \partial_\beta\Phi_1\\ \partial_\alpha\Phi_2 & \partial_\beta\Phi_2\end{pmatrix}\right|_{(\lambda,\alpha,\beta)}$$

Wo $\det \neq 0$ können wir per implizitem Funktionensatz die Gleichung $\varphi(\lambda,\alpha,\beta) = (x\ y)^T$ lokal nach $\alpha, \beta$ auflösen:

$$(\alpha,\beta) = (\alpha,\beta)(\lambda,x,y)$$

Solche Punkte sind *nicht* "´Ränder“ der Projektion, sie werden also nicht gezeichnet.

Deshalb interessieren uns Punkte $(x\ y)^T = \varphi(\lambda,\alpha,\beta)$, in denen gilt:

$$
\begin{aligned}
0 &\overset{!}{=} \det\big(\mathcal{D}_{(\alpha,\beta)}\varphi(\lambda,\alpha,\beta)\big)\\
&= \det\begin{pmatrix} -\cos\lambda\cdot(1+r\cdot\cos\beta)\cdot\sin\alpha & -r\cdot(\cos\lambda\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta+\sin\lambda\cdot\cos\beta)\\ (1+r\cdot\cos\beta)\cdot\cos\alpha & -r\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\end{pmatrix}\\
&= r\cdot(1+r\cdot\cos\beta)\cdot\big(\cos\lambda\cdot\sin^2\alpha\cdot\sin\beta+\cos\lambda\cdot\cos^2\alpha\cdot\sin\beta+\sin\lambda\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta\big)\\
&= r\cdot(1+r\cdot\cos\beta)\cdot\big(\big(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\big)\cdot\cos\lambda\cdot\sin\beta+\sin\lambda\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta\big)\\
&= \underbrace{r\cdot(1+r\cdot\cos\beta)}_{>0}\cdot\underbrace{(\cos\lambda\cdot\sin\beta+\sin\lambda\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta)}_{C(\lambda,\alpha,\beta)}
\end{aligned}
$$

*Behauptung:*

$$C(\lambda,\alpha,\beta)=0 \Longrightarrow \nabla_{(\alpha,\beta)}C(\lambda,\alpha,\beta)\neq 0$$

Insbesondere: $\{(\alpha,\beta)\in S^1\times S^1 \mid C(\lambda,\alpha,\beta)=0\}$ besteht aus endlich vielen geschlossenen Kurven ohne (Selbst-)Überschneidungen.
Denn: Kontraposition

$$\nabla_{(\alpha,\beta)}C(\lambda,\alpha,\beta)=0 \Longrightarrow C(\lambda,\alpha,\beta)\neq 0$$

Also

$$
\begin{aligned}
0 &= \partial_\alpha C = -\sin\lambda\cdot\sin\alpha\cdot\cos\beta && \text{und}\\
0 &= \partial_\beta C = \cos\lambda\cdot\cos\beta-\sin\lambda\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta
\end{aligned}
$$

Fall 1: $\cos\beta=0$ und $\sin\lambda\cdot\cos\alpha=0$

$$C=\underbrace{\cos\lambda}_{>0}\cdot\underbrace{\sin\beta}_{=\pm1}\neq 0$$

Fall 2: $\sin\lambda=0$ und $\cos\lambda\cdot\cos\beta=0$

$$C=\underbrace{\cos\lambda}_{=\pm1}\cdot\underbrace{\sin\beta}_{=\pm1}\neq 0$$

Fall 3: $\sin\alpha=0$ und $\cos\lambda\cdot\cos\beta\mp\sin\lambda\cdot\sin\beta=0$
Wäre auch noch $C=\cos\lambda\cdot\sin\beta\pm\sin\lambda\cdot\cos\beta=0$, dann hätten wir

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}\cos\beta\\ \mp\sin\beta\end{pmatrix}\perp\begin{pmatrix}\cos\lambda\\ \sin\lambda\end{pmatrix} && \text{und}\\
&\begin{pmatrix}\sin\beta\\ \pm\cos\beta\end{pmatrix}\perp\begin{pmatrix}\cos\lambda\\ \sin\lambda\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Also

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \cos\beta \\ \mp\sin\beta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sin\beta \\ \pm\cos\beta \end{pmatrix} && \text{oder} \\
\begin{pmatrix} \cos\beta \\ \mp\sin\beta \end{pmatrix} &= -\begin{pmatrix} \sin\beta \\ \pm\cos\beta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Dann würde aber gelten:

$$\begin{aligned}
\cos\beta &= -\cos\beta = 0 \\
\sin\beta &= -\sin\beta = 0
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Widerspruch!

# 7 Integration im $\mathbb{R}^N$

## 7.1 Stetige Funktionen

**Definition 7.1.1.** Sei $Q = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_N, b_N]$ ein Quader im $\mathbb{R}^N$ und $f : Q \to \mathbb{R}$ stetig. Setze

$$F_1(x_2, \ldots, x_N) := \int_{a_1}^{b_1} f\left(x_1, \ldots, x_N\right) \, \mathrm{d}x_1$$

$$F_2(x_3, \ldots, x_N) := \int_{a_2}^{b_2} F_1\left(x_2, \ldots, x_N\right) \, \mathrm{d}x_2$$

$$\vdots$$

$$F_N := \int_{a_N}^{b_N} F_{N-1}\left(x_N\right) \, \mathrm{d}x_N$$

Wir nennen

$$\begin{aligned} F_N &:= \int_Q f \\ &= \int_Q f\left(x_1, \ldots, x_N\right) \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_N \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_N}^{b_N} f\left(x_1, \ldots, x_N\right) \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_N \end{aligned}$$

das ***Integral*** von $f$ über den Quader $Q$.

*NB:* Diese Definition ist sinnvoll und möglich, da $f$ gleichmäßig stetig auf dem kompakten Quader $Q$ ist und folglich alle $F_k$ stetig sind.
Betrachte die stetige Funktion $f \in \mathcal{C}_c^0\left(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}\right)$ mit ***kompaktem Träger***

$$\mathsf{supp}(f) := \left\{ x \in \mathbb{R}^N \;\middle|\; f(x) \neq 0 \right\}$$

Dann definiere

$$\int_{\mathbb{R}^N} f := \int_Q f$$

wobei $Q$ ein beliebiger Quader ist, der $\mathsf{supp}(f)$ enthält.
*NB:* Diese Definition hängt nicht von der Wahl von $Q$ ab.

Vorlesung 05.11.09

**Beispiel.**

(i) Alle $\alpha_k > 0$

$$\int_0^{b_N} \cdots \int_0^{b_1} x^\alpha \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_N = \int_0^{b_N} \cdots \int_0^{b_2} \frac{b_1^{\alpha_1+1}}{\alpha_1+1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_N^{\alpha_N} \, \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_N$$
$$= \frac{1}{(\alpha_1+1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_N+1)} \cdot \underbrace{b_1^{\alpha_1+1} \cdot \ldots \cdot b_N^{\alpha_N+1}}_{b^{\alpha+(1,\ldots,1)}}$$

(ii) $\varphi_k \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, $k = 1, \ldots, N$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_1(x_1) \cdot \cdots \cdot \varphi_N(x_N) \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_N = \prod_{k=1}^N \left( \int_{\mathbb{R}} \varphi_k(x_k) \, \mathrm{d}x_k \right)$$

**Satz 7.1.2.** *Seien $f, g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^N$. Dann gilt*

*(i)* Linearität:

$$\int_{\mathbb{R}^N} (f + \lambda \cdot g) = \int_{\mathbb{R}^N} f + \lambda \cdot \int_{\mathbb{R}^N} g$$

*(ii)* Monotonie:

$$\big(\forall x \in \mathbb{R}^N \ : \ f(x) \leq g(x)\big) \Longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} f \leq \int_{\mathbb{R}^N} g$$

*(iii)* Translationsinvarianz: *Für* $(\tau_a f)(x) := f(x_a)$ *gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \tau_a f = \int_{\mathbb{R}^N} f$$

**Beweis:**

(i) Benutze Linearität in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ und Definition des Integrals.

$$\text{zu } f, g \text{ gehören: } F_1, \ldots, F_N; G_1, \ldots, G_N$$
$$\text{zu } f + \lambda \cdot g \text{ gehören: } F_1 + \lambda \cdot G_1, \ldots, \underbrace{F_N}_{\int f} + \lambda \cdot \underbrace{G_N}_{\int g}$$

(ii)

$$f \leq g \Longrightarrow F_1 \leq G_1 \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow F_N \leq G_N$$

(iii)

$$
\begin{aligned}
\tau_a f &= \left(\tau_{a_N \cdot e_N} \circ \ldots \circ \tau_{a_1 \cdot e_1}\right) f \\
\tau_{(a_2,\ldots,a_N)} F_1 &= \int f\left(x_1 - \cancel{a_1}, x_2 - a_2, \ldots, x_N - a_N\right) \, \mathrm{d}x_1 \\
&\vdots \\
F_N &= \int \cdots \int f(x_1 - a_1, \ldots, x_N - a_N) \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_N \\
&= \int \tau_a f
\end{aligned}
$$

□

**Satz 7.1.3.** *Sei $I : \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ und es gelte*

*(i) Linearität:*

$$\forall \lambda, g, f \; : \; I(f + \lambda \cdot g) = I(f) + \lambda \cdot I(g)$$

*(ii) Monotonie*

$$\forall f \leq g \; : \; I(f) \leq I(g)$$

*(iii) Translationsinvarianz*

$$\forall a \in \mathbb{R}^N, f \in \mathcal{C}_c \; : \; I(\tau_a f) = I(f)$$

*Dann existiert eine Konstante $c \geq 0$, sodass gilt*

$$\forall f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N) \; : \; I(f) = c \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^N} f$$

**Lemma 7.1.4.** *Seien $f_n \in \mathcal{C}_c$ mit $\mathsf{supp}(f_n) \subseteq Q$ für alle $n$. Außerdem konvergiere $f_n \to f$ gleichmäßig für $n \to \infty$. Dann folgt:*

$$I(f_n) \to I(f)$$

*Es gilt also „Stetigkeit“.*

Konstruktion:

$$
\begin{aligned}
\psi(t) &:= \max(1 - |t|, 0) && (t \in \mathbb{R}) \\
\Psi(x) &:= \psi(x_1) \cdot \ldots \cdot \psi(x_N) \\
\Psi_\varepsilon(x) &:= \Psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) && (0 < \varepsilon \leq 1) \\
f_\varepsilon(x) &:= \sum_{a \in \mathbb{Z}^N} f(\varepsilon \cdot a) \left(\tau_{\varepsilon \cdot a} \Psi_\varepsilon\right)(x)
\end{aligned}
$$

**Lemma 7.1.5.** *Mit $f_\varepsilon \in \mathcal{C}_c$ konvergiert $f_\varepsilon \to f$ für $\varepsilon \searrow 0$ gleichmäßig (in der Supremumsnorm) und es existiert $Q$ mit*

$$\forall 0 < \varepsilon \leq 1 \ : \ \mathsf{supp}(f_\varepsilon) \subseteq Q$$

**Lemma 7.1.6.**

$$I\left(\Psi_{\frac{\varepsilon}{2}}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^N \cdot I\left(\Psi_\varepsilon\right)$$
$$I\left(\Psi_{2^{-n}}\right) = 2^{-n\cdot N} \cdot I\left(\Psi\right)$$

**Beweis (Satz 7.1.3):** Konstruiere eine Folge $f_n = f_\varepsilon$ mit $\varepsilon = 2^{-n}$, so dass (wegen Lemma 7.1.5) $f_n \to f$ für $n \to \infty$. Dann gilt wegen Lemma 7.1.4 auch, dass $I(f_\varepsilon) = I(f_n) \to I(f)$. Nach Konstruktion von $f_\varepsilon$ folgt:

$$\begin{aligned} I(f_\varepsilon) &= I\left(\sum_{a\in\mathbb{Z}^N} f(\varepsilon\cdot a)\left(\tau_{\varepsilon\cdot a}\Psi_\varepsilon\right)\right) \\ &= \sum_{a\in\mathbb{Z}^N} f(\varepsilon\cdot a)\cdot I\left(\cancel{\tau_{\varepsilon\cdot a}}\Psi_{2^{-n}}\right) && \text{(Linearität, Transl.-inv.)} \\ &= \sum_{a\in\mathbb{Z}^N} f(\varepsilon\cdot a)\cdot 2^{-n\cdot N}\cdot \underbrace{I(\Psi)}_{=:c} && \text{(Lemma 7.1.6)} \end{aligned}$$

Das Integral hat dieselben Eigenschaften wie $I$, also auch:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} f_\varepsilon = \sum_{a\in\mathbb{Z}^N} f(\varepsilon\cdot a)\cdot 2^{-n\cdot N}\cdot \int\limits_{\mathbb{R}^N}\Psi$$
$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\Psi = \left(\int\psi\right)_N = 1^N = 1$$

Mit $c$ multipliziert erhält man dann

$$c\cdot\int\limits_{\mathbb{R}^N} f = I(f)$$

Dass $c = I(\Psi) \geq 0$, folgt aus Monotonie und Linearität:

$$I(\Psi) \geq I(0) = 0$$

□

**Beweis (Lemma 7.1.4):** $I$ ist linear. Zeige also nur, dass $I$ beschränkt ist, also das gilt:

$$|I(f)| \leq C\cdot\|f\|$$

Dabei dürfen wir uns wegen $\mathsf{supp}(f_n) \subseteq Q$ (unabhängig von $n$) auf $f$ mit $\mathsf{supp}(f) \subseteq$ (fest) einschränken. Sei $Q = [\alpha_1, \beta_1] \times \ldots \times [\alpha_N, \beta_N]$, $\varphi_k$ mit $k = 1, \ldots, N$ wie im Bild und $\Phi(x) := \varphi_1(x_1) \cdot \ldots \cdot \varphi_N(x_N)$ Dann gilt

$$\forall x \in \mathbb{R}^N \ : \ -\Phi(x) \cdot \|f\| \leq f(x) \leq \Phi(x) \cdot \|f\|$$

Aus der Monotonie von $I$ folgt dann

$$-\|f\| \cdot I(\Phi) \leq I(f) \leq \|f\| \cdot \underbrace{I(\Phi)}_{=:C}$$

□

**Beweis (Lemma 7.1.5):**
Bedeutung:

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(\varepsilon \cdot a_0) &= \sum_{a \in \mathbb{Z}^N} f(\varepsilon \cdot a) \cdot \Psi_\varepsilon(\varepsilon \cdot a_0 - \varepsilon \cdot a) \\ &= \sum_{a \in \mathbb{Z}^N} f(\varepsilon \cdot a) \cdot \Psi(a_0 - a) \\ &= f(\varepsilon \cdot a_0) \\ \Psi(a_0 - a) &= \begin{cases} 1 & a = a_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Also interpolieren die $f_\varepsilon$ auf irgendeine Art $f|_{\varepsilon \cdot \mathbb{Z}^N}$.
Behauptung:

$$\forall 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \ \forall \eta > 0 \ \exists \varepsilon_0 > 0 \ : \ \|f - f_\varepsilon\| \leq \eta$$

Wegen $\varepsilon \leq 1$ genügt es, dies für $x \in Q := [\alpha_1 - 1, \beta_1 + 1] \times \ldots \times [\alpha_N - 1, \beta_N + 1]$ zu überprüfen. Dort ist $f$ sogar gleichmäßig stetig.

$$\forall \eta > 0 \ \exists \delta > 0 \ : \ |x - x'| \leq \delta \wedge x, x' \in Q \Longrightarrow |f(x) - f(x')| \leq \eta$$

Also los (für $x \in Q$):

$$\begin{aligned} |f(x) - f_\varepsilon(x)| &= \left| f(x) - \sum_{a \in \mathbb{Z}^n} f(\varepsilon \cdot a) \cdot (\tau_{\varepsilon \cdot a} \Psi_\varepsilon)(x) \right| \\ &\leq \sum_{a \in \mathbb{Z}^n} \underbrace{|f(x_) - f(\varepsilon \cdot a)|}_{\leq \eta} \cdot (\tau_{\varepsilon \cdot a} \Psi_\varepsilon)(x) \\ &\leq \eta \end{aligned}$$

Es wird benutzt, dass $(\tau_{\varepsilon \cdot a} \Psi_\varepsilon)(x) \neq 0$ nur dann eintritt, wenn $|x - \varepsilon \cdot a| \leq \varepsilon := \delta$. □

Vorlesung

**Beweis (Lemma 7.1.6):** Für $N = 1$ ist $\Psi_\varepsilon = \psi_\varepsilon$. Die Funktion $\psi$ ist aber so gewählt, dass

$$\psi = \frac{1}{2} \cdot \tau_{-\frac{1}{2}} \psi_{\frac{1}{2}} + \tau_0 \psi_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \tau_{\frac{1}{2}} \psi_{\frac{1}{2}}$$

Beim Skalieren mit $\varepsilon$ also

$$\psi_\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot \tau_{-\frac{\varepsilon}{2}} \psi_{\frac{\varepsilon}{2}} + \tau_0 \psi_{\frac{\varepsilon}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \tau_{\frac{\varepsilon}{2}} \psi_{\frac{\varepsilon}{2}}$$

Wegen Linearität und Translationsinvarianz von $I$ folgt dann

$$I(\psi_\varepsilon) = \frac{1}{2} \cdot I\left(\cancel{\tau_{-\frac{\varepsilon}{2}}} \psi_{\frac{\varepsilon}{2}}\right) + I\left(\cancel{\tau_0} \psi_{\frac{\varepsilon}{2}}\right) + \frac{1}{2} \cdot I\left(\cancel{\tau_{\frac{\varepsilon}{2}}} \psi_{\frac{\varepsilon}{2}}\right) = 2 \cdot I\left(\psi_{\frac{\varepsilon}{2}}\right)$$

Für $N \geq 1$ gilt

$$\begin{aligned}
\Psi_\varepsilon(x) &= \prod_{k=1}^N \psi_\varepsilon(x_k) \\
&= \prod_{k=1}^N \left( \sum_{j_k \in \{-1,0,1\}} 2^{-|j_k|} \cdot (\tau_{j_k \cdot \frac{\varepsilon}{2}} \psi_{\frac{\varepsilon}{2}})(x_k) \right) \\
&= \sum_{\underline{j} \in \{-1,0,1\}^N} \left( \prod_{k=1}^N 2^{-|j_k|} \cdot (\tau_{j_k \cdot \frac{\varepsilon}{2}} \psi_{\frac{\varepsilon}{2}})(x_k) \right) \\
&= \sum_{\underline{j} \in \{-1,0,1\}^N} 2^{-|j|} \cdot \left( \tau_{j \cdot \frac{\varepsilon}{2}} \Psi_{\frac{\varepsilon}{2}} \right)(x)
\end{aligned}$$

Wir nutzen erneut Linearität und Translationsinvarianz von $I$.

$$\begin{aligned}
I(\Psi_\varepsilon) &= \sum_{\underline{j} \in \{-1,0,1\}^N} 2^{-|j|} \cdot I\left( \cancel{\tau_{j \cdot \frac{\varepsilon}{2}}} \Psi_{\frac{\varepsilon}{2}} \right) \\
&= I\left(\Psi_{\frac{\varepsilon}{2}}\right) \cdot \sum_{\underline{j} \in \{-1,0,1\}^N} 2^{-|j|} \\
&= I\left(\Psi_{\frac{\varepsilon}{2}}\right) \cdot \prod_{k=1}^N \underbrace{\left( \sum_{j_k \in \{-1,0,1\}} 2^{-|j_k|} \right)}_{=\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}=2} \\
&= 2^N \cdot I\left(\Psi_{\frac{\varepsilon}{2}}\right)
\end{aligned}$$

□

**Korollar 7.1.7.** *Die Reihenfolge beim Integrieren ist egal, d.h. für alle Permutationen $\pi \in S_N$ gilt*

$$\int_{a_N}^{b_N} \cdots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \ldots, x_N) \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_N = \int_{a_{\pi(N)}}^{b_{\pi(N)}} \cdots \int_{a_{\pi(1)}}^{b_{\pi(1)}} f(x_1, \ldots, x_N) \, \mathrm{d}x_{\pi(1)} \ldots \mathrm{d}x_{\pi(N)}$$

**Beweis:** Definiere die rechte Seite als $I(f)$. Da diese Abbildung auch linear, monoton und translationsinvariant ist, gilt wegen Satz 7.1.3

$$\exists c \geq 0 \; : \; I(f) = c \cdot \int f$$

Für eine konkrete Funktion

$$f(x) := \Psi(x) = \psi(x_1) \cdot \ldots \cdot \psi(x_N)$$

gilt aber

$$I(f) = \int\limits_{a_{\pi(1)}}^{b_{\pi(1)}} \psi(x_{\pi(1)}) \cdot \ldots \cdot \int\limits_{a_{\pi(N)}}^{b_{\pi(N)}} \psi(x_{\pi(N)}) = \int\limits_{a_1}^{b_1} \psi(x_1) \cdot \ldots \cdot \int\limits_{a_N}^{b_N} \psi(x_N) = \int f$$

Also ist $c = 1$. □

## 7.2 Transformationen (Substitution)

Betrachte $f \in \mathcal{C}_c\left(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}\right)$ mit $\mathsf{supp}(f) \subseteq V$ offen und schreibe

$$\int\limits_V f := \int\limits_{\mathbb{R}^N} f$$

**Satz 7.2.1.** *Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^N$ offen und $\varphi : U \to V$ sei ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus. Sei außerdem $f \in \mathcal{C}_c$ mit $\mathsf{supp}(f) \subseteq V$. Dann gilt*

$$\int\limits_V f(y) \; \mathrm{d}y = \int\limits_U f(\varphi(x)) \cdot \left|\det \varphi'(x)\right| \; \mathrm{d}x$$

*Kurzschreibweise:*

$$\int\limits_V f = \int\limits_U (f \circ \varphi) \cdot \left|\det \varphi'\right|$$

*Spezialfall:* Sei $y = \varphi(x) = Ax$ linear mit $\det A \neq 0$.

(i) Sei $A = D$ eine Diagonalmatrix, $y_k := \alpha_k \cdot x_k$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int\limits_U (f \circ \varphi) \cdot \left|\det \varphi'\right| &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \cdots \int f(\alpha_1 \cdot x_1, \ldots, \alpha_N \cdot x_N) \cdot |\alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_k| \; \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_N \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \cdots \int f(y_1, \ldots, y_N) \; \mathrm{d}y_1 \ldots \mathrm{d}y_N \\
&= \int\limits_V f
\end{aligned}$$

(ii) Sei $A = R$ eine orthogonale Matrix, also $RR^T = \mathsf{id}$. Definiere

$$I(f) := \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(Ax) \cdot |\det A| \;\mathrm{d}x$$

Es ist klar, dass $I$ linear und monoton ist. Die Translationsinvarianz muss noch gezeigt werden.

$$\begin{aligned} I(\tau_a f) &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(Ax - a) \cdot |\det A| \;\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(A(x - A^{-1}a)) \cdot |\det A| \;\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(\tau_{A^{-1}a}(f \circ A)\right)(x) \cdot |\det A| \;\mathrm{d}x \\ &= I(f) \end{aligned}$$

Da nun alle Voraussetzungen gezeigt sind, gilt nach Satz 7.1.3, dass

$$I(f) = c \cdot \int\limits_V f$$

Um zu zeigen, dass $c = 1$, reicht es aus eine einzige Funktion $f \geq 0$ zu testen. Wähle

$$f(x) := \max(1 - |x|_2^2\,, 0)$$

Dann gilt $f(x) = f(Ax)$, weil $A = R$ orthogonal ist. Also

$$I(f) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(Ax) \cdot |\det A| \;\mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x) \cdot \underbrace{|\det A|}_{=1} \;\mathrm{d}x$$

Also gilt $c = 1$.

(iii) Nun gehen wir von beliebigen $A$ (mit $\det A \neq 0$) aus. Wegen Singulärwertzerlegung gibt es orthogonale Matrizen $R_1, R_2$ und eine Diagonalmatrix $D > 0$, so dass

$$A = R_1 D R_2$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_{\mathbb{R}^N} f(R_1 D \cancel{R_2} x) \cdot |\det R_1 D R_2| \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} f(R_1 D x) \cdot \underbrace{|\det R_1|}_{=1} \cdot |\det D| \cdot \underbrace{|\det R_2|}_{=1} \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} f(\cancel{R_1} y) \, \mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} f \end{aligned}$$

Nun muss der Transformationssatz noch für nichtlineare $\varphi$ gezeigt werden. Die Idee Vorlesung 12.11.09

$$I(f) := \int_U (f \circ \varphi) \cdot \left|\det \varphi'\right|$$

zu definieren und dann die drei Eigenschaften zu zeigen, scheitert an der Translationsinvarianz. Also wird eine andere Herangehensweise gewählt. Zunächst „lokalisieren“ wir $f$, d.h. ohne Einschränkung

$$\mathit{Durchmesser}(\mathsf{supp} f) \leq 2\varepsilon$$

Anschließend zeigen wir, dass die beiden Integrale im Satz beinahe übereinstimmen für $f = \tau_{\varepsilon \cdot a} \Psi_\varepsilon$.

1. Problem lokalisieren

$$\begin{aligned} \int_V f(y) \, \mathrm{d}y &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_V \left( \sum_{a \in \mathbb{Z}^N} f(\varepsilon \cdot a) \cdot \left(\tau_{\varepsilon \cdot a} \Psi_\varepsilon\right)(y) \right) \, \mathrm{d}y \\ &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \sum_{a \in \mathbb{Z}^N} f(\varepsilon \cdot a) \cdot \int_V \left(\tau_{\varepsilon \cdot a} \Psi_\varepsilon\right)(y) \, \mathrm{d}y \end{aligned}$$

In der nächsten Umformung verwenden wir die Gleichheit, welche dann im zweiten Schritt gezeigt wird.

$$\begin{aligned} &\int_V f(y) \, \mathrm{d}y \\ &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \sum_{a \in \mathbb{Z}^N} f(\varepsilon \cdot a) \cdot \left( \int_U \left(\tau_{\varepsilon \cdot a} \Psi_\varepsilon \circ \varphi\right)(x) \cdot \left|\det \varphi'(x)\right| \, \mathrm{d}x + o\left(\varepsilon^N\right) \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left( \int_U \sum_{a \in \mathbb{Z}^N} f(\varepsilon \cdot a) \cdot \left(\tau_{\varepsilon \cdot a} \Psi_\varepsilon \circ \varphi\right)(x) \cdot \left|\det \varphi'(x)\right| \, \mathrm{d}x + \sum_{a \in \mathbb{Z}^N} f(\varepsilon \cdot a) \cdot o\left(\varepsilon^N\right) \right) \end{aligned}$$

Zunächst gilt, dass $f_\varepsilon \circ \varphi \to f \circ \varphi$ gleichmäßig konvergiert. Also können wir die erste Summe ersetzen. In der zweiten Summe sind nur $\mathcal{O}\left(\varepsilon^{-N}\right)$ Terme ungleich Null, also

$$\sum_{a \in \mathbb{Z}^N} f(\varepsilon \cdot a) \cdot o\left(\varepsilon^N\right) = \frac{C}{\varepsilon^N} \cdot o\left(\varepsilon^N\right) = o(1)$$

Also folgt nun

$$\int_V f(y) \, \mathrm{d}y = \int_U (f \circ \varphi)(x) \cdot \left|\det \varphi'(x)\right| \, \mathrm{d}x$$

2. Wir zeigen nun noch, dass

$$\int_V \left(\tau_{\varepsilon \cdot a} \Psi_\varepsilon\right)(y) \, \mathrm{d}y = \int_U \left(\tau_{\varepsilon \cdot a} \Psi_\varepsilon \circ \varphi\right)(x) \cdot \left|\det \varphi'(x)\right| \, \mathrm{d}x + o\left(\varepsilon^N\right)$$

Durch invariante Translationen in $x$ bzw. $y$ dürfen wir ohne Einschränkung annehmen, dass $a = 0$ und $\varphi(0) = 0$. Also ist dann

$$\varphi(x) = Ax + o(|x|)$$

Weil $\varphi$ Diffeomorphismus ist, dürfen wir mit $x = \varepsilon \cdot \xi$ und $|\xi| = \max\left(|\xi_1|, \ldots, |\xi_N|\right)$ schreiben

$$\begin{aligned}
&\int_U \left(\tau_{\varepsilon \cdot a} \Psi_\varepsilon \circ \varphi\right)(x) \cdot \left|\det \varphi'(x)\right| \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^N,\, |\xi| \le 1} \Psi\left(\frac{1}{\varepsilon} \cdot \left(A\varepsilon\xi + o(\varepsilon)\right)\right) \cdot \left|\det(A + o(1))\right| \cdot \varepsilon^N \, \mathrm{d}\xi \\
&= o\left(\varepsilon^N\right) + \int_{\mathbb{R}^N,\, |\xi| \le 1} \Psi(A\xi) \cdot |\det A| \cdot \varepsilon^N \, \mathrm{d}\xi
\end{aligned}$$

Nun ersetzen wir:

$$\begin{aligned}
y &:= \varepsilon A \xi \\
\xi &= \frac{1}{\varepsilon} A^{-1} y \\
\mathrm{d}\xi &= \varepsilon^{-N} \left|\det A^{-1}\right| \, \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_U \left(\tau_{\varepsilon \cdot a} \Psi_\varepsilon \circ \varphi\right)(x) \cdot \left|\det \varphi'(x)\right| \, \mathrm{d}x &= o\left(\varepsilon^N\right) + \int_{\mathbb{R}^N,\, |y| \le \mathcal{O}(\varepsilon)} \Psi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) \cdot |\det A| \cdot \left|\det A^{-1}\right| \, \mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \Psi_\varepsilon(y) \, \mathrm{d}y + o\left(\varepsilon^N\right)
\end{aligned}$$

**Beispiel** (Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^N$). $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ sei gegeben durch

$$\varphi(r, \alpha) := r \cdot \underline{e}(\alpha)$$

Dabei ist $r \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}^{N-1}$ und $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{N-1})$. Mit der Kurzschreibweise $c_k := \cos \alpha_k$ und $s_k := \sin \alpha_k$ ist dann

$$\underline{e}(\alpha) := \begin{pmatrix} c_1 \\ s_1 \cdot c_2 \\ s_1 \cdot s_2 \cdot c_3 \\ \vdots \\ s_1 \cdot \ldots \cdot s_{N-2} \cdot c_{N-1} \\ s_1 \cdot \ldots \cdot s_{N-2} \cdot s_{N-1} \end{pmatrix}$$

Die Determinante ist dann

$$\det \varphi'(r, \alpha) = r^{N-1} \cdot s_1^{N-2} \cdot s_2^{N-3} \cdot \ldots \cdot s_{N-2}$$

Es gilt, dass $\det \varphi'(r, \alpha) > 0$ für

$$(r, \alpha) \in U := \{r > 0;\ 0 < \alpha_1, \ldots, \alpha_{N-2} < \pi;\ 0 \leq \alpha_{N-1} < 2\pi\}$$

Nach Transformationssatz gilt dann für $f \in \mathcal{C}_c(U)$ mit $x = \varphi(r, \alpha)$

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_N = \int f(\varphi(r, \alpha)) \cdot r^{N-1} \cdot s_1^{N-2} \cdot \ldots \cdot s_{N-2}\ \mathrm{d}r \mathrm{d}\alpha_1 \ldots \mathrm{d}\alpha_{N-1}$$

In der Physik (für $N = 3$) nennt man

$$\mathrm{d}\Omega = \sin \alpha_1\ \mathrm{d}\alpha_1 \mathrm{d}\alpha_2$$

den Raumwinkel zur Richtung $\underline{e}(\alpha)$.
Stochastik: Gauß-Verteilung

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^2\right)\ \mathrm{d}x \stackrel{!}{=} 1$$

$$I(\sigma) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^2\right)\ \mathrm{d}x \stackrel{!}{=} \sqrt{2\pi} \cdot \sigma$$

Wegen Translationsinvarianz kann das $\mu$ im folgenden vernachlässigt werden. Um die

Gleichheit zu zeigen, wenden wir einen Trick an.

$$
\begin{aligned}
I(\sigma)^2 &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{x_1^2 + x_2^2}{\sigma^2}\right) \, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{0}^{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{r^2}{\sigma^2}\right) \, \mathrm{d}\alpha_1 \mathrm{d}r \\
&= \int\limits_{0}^{2\pi} \left[-\sigma^2 \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{r^2}{\sigma^2}\right)\right]_0^{\infty} \, \mathrm{d}\alpha_1 \\
&= \sigma^2 \cdot \int\limits_{0}^{2\pi} 1 \, \mathrm{d}\alpha_1 \\
&= 2\pi \cdot \sigma^2
\end{aligned}
$$

## 7.3 Integration halbstetiger Funktionen

Vorlesung 19.11.09

Die Grundidee ist, dass für $f_n \searrow f$ bzw. $f_n \nearrow f$ die Gleichung

$$\int f = \lim_{n \to \infty} \int f_n$$

gilt. Dabei ist $f_n \searrow f$ eine Kurzschreibweise für

- $f_1 \geq f_2 \geq \cdots \geq f$
- $\forall x \ : \ \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$

Folgendes führt leider nicht zum Ziel.

**Satz 7.3.1** (Ulisse Dini, 1845-1918)**.** *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^N$ kompakt, $f_n : K \to \mathbb{R}$ stetig und $f_n \searrow f$. Wenn auch $f : K \to \mathbb{R}$ stetig ist, dann ist die Konvergenz sogar gleichmäßig. Also in dieser Situation:*

$$f \text{ stetig} \iff \text{gleichmäßige Konvergenz}$$

**Beweis:** Ohne Einschränkung $f \equiv 0$, sonst kann wegen Stetigkeit von $f$ die Folge $f_n - f$ betrachtet werden. Dann gilt zunächst

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall x \in K \ \exists n_x \ : \ 0 \leq f_{n_x}(x) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Da $f_{n_x}$ stetig ist, gilt außerdem

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_x > 0 \ : \ |y - x| < \delta_x \Longrightarrow 0 \leq f_{n_x}(y) \leq \varepsilon$$

Nun schreiben wir die Menge $K$ um:

$$K = \bigcup_{x \in K} \{x\} \subseteq B_{\delta_x}(x)$$

Da $K$ nach Voraussetzung kompakt ist, existiert aber auch eine Überdeckung durch nur endliche viele Kugeln um geeignete $x_i$.

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B\delta_{x_i}(x_i)$$

Setze nun $n_* := \max\limits_{1 \leq i \leq m} n_{x_i}$. Dann folgt für $n \geq n_*$ und beliebige $y \in K$, weil dann auch $y \in B_{\delta_{x_i}}$ und somit $|y - x_i| \leq \delta_{x_i}$, dass:

$$0 \leq f_n(y) \leq f_{n_*}(y) \leq f_{n_{x_i}}(y) \leq \varepsilon$$

□

**Beispiel.** Monotoner Limes stetiger Funktionen muss nicht stetig sein!
Definiere z.B. die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} \text{stetig, positiv} & x \in [a, b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

sowie die Folge

$$f_n(x) := \begin{cases} f(x) & x \in [a, b] \\ \text{linear} & \text{dazwischen} \\ 0 & x \leq a - \frac{1}{n} \text{ oder } x \geq b + \frac{1}{n} \end{cases}$$

Es gilt für alle $x$, dass $f_n(x) \searrow f(x)$. Also ist dieser Limes nicht gleichmäßig!

### 7.3.1 Halbstetige Funktionen

**Definition 7.3.2.** Wir nennen $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ eine ***von oben stetig approximierbare Funktion***, wenn zu $f$ eine Folge $f_n \in \mathcal{C}_c^0\left(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}\right)$ existiert mit $f_n \searrow f$. Wir schreiben dann

$$f \in \mathcal{H}^{\downarrow}$$

Analog definieren wir $f \in \mathcal{H}^{\uparrow}$, wenn eine Folge mit $f_n \nearrow f$ existiert.

**Definition 7.3.3.** $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ heißt ***oberhalb stetig (ohs) in*** $x_0$, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; : \; \|x - x_0\| < \delta \Longrightarrow f(x) < f(x_0) + \varepsilon$$

Die Funktion heißt ***oberhalb stetig***, wenn sie in jedem $x_0$ ohs ist.
Analog definieren wir $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ als ***unterhalb stetig (uhs) in*** $x_0$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; : \; \|x - x_0\| < \delta \Longrightarrow f(x) > f(x_0) - \varepsilon$$

Es gilt, dass $f$ stetig ist, wenn es ohs und uhs ist. Außerdem gilt auch $\mathcal{H}^\uparrow = -\mathcal{H}^\downarrow$ und $-\text{ohs} = \text{uhs}$.

**Bemerkung.**

(a)
$$f \text{ ist ohs} \iff \forall x_0 \ : \ f(x_0) \geq \limsup_{x \to x_0} f(x)$$

(b)
$$\begin{aligned} f \text{ ist ohs} &\iff \{f \geq c\} := \left\{ x \in \mathbb{R}^N \middle| \, f(x) \geq c \right\} \text{ ist abgeschlossen } (\forall c \in \mathbb{R}) \\ &\iff \{f < c\} \text{ ist offen} \end{aligned}$$

(c)
$$1_A(x) := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \text{ ist ohs} \iff A \text{ ist abgeschlossen}$$

(d) Sei $I$ eine nicht unbedingt abzählbare Indexmenge.
$$f_i \text{ ist ohs } (\forall i \in I) \implies \inf_i f_i \text{ ist auch ohs}$$

**Beweis:**

(a) „⇒“: $\limsup_{x \to x_0} f(x) \leq \sup_{|x - x_0| \leq \delta} f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon$

„⇐“: Definition einsetzen

(b) „⇒“: $f(x) < f(x_0) + \varepsilon < c$

„⇐“: $c := f(x_0) + \varepsilon$

(c) „⇒“: $A = \{1_A \geq \frac{1}{2}\}$ ist abgeschlossen (vgl. (b))

„⇐“: Betrachte $\{1_A \geq c\}$

(d) $\{f \geq c\} = \underbrace{\bigcap_{i \in I} \underbrace{\{f_i \geq c\}}_{\text{abg.}}}_{\text{abg.}}$

□

**Satz 7.3.4.** *$f \in \mathcal{H}^\downarrow$ genau dann, wenn $f$ ohs ist und ein kompaktes $K$ existiert mit $f \leq 0$ außerhalb von $K$.*

**Beweis:**

„⇒“: $f \in \mathcal{H}^\downarrow$ heißt, dass eine Folge $f_n \in \mathcal{C}_c$ existiert mit $f_n \searrow f$ und $f = \inf_n f_n$. Da die $f_n$ stetig sind, sind sie auch insbesondere ohs, und wegen Bemerkung (d) ist auch $f$ ohs. Außerdem ist $f \leq f_1 = 0$ außerhalb einer kompakten Menge $K := \mathsf{supp}(f_1)$.

„$\Leftarrow$“: Konstruiere eine Folge $f_n \in \mathcal{C}_c$ mit $f_n \searrow f$. Zu einem festen $f$ existiert $0 \leq M < \infty$ mit

$$\sup_{\mathbb{R}^N} f \leq M$$

Wir wissen, dass $f \leq 0$ außerhalb von $K$. Wenn $M = \infty$ wäre, dann existieren $x_n \in K$ mit $f(x_n) \to \infty$. Ohne Einschränkung (wegen konvergenter Teilfolge) gilt $x_n \to x_*$. Aber wegen Bemerkung (a) wäre dann

$$\infty = \limsup_{n\to\infty} f(x_n) \leq f(x_*) < \infty$$

Nun definieren wir zu $a \in \mathbb{R}^N$, $c \leq M$ und $\delta > 0$ eine Funktion $g_{a,c,\delta} \in \mathcal{C}_c$ wie folgt

$$g_{a,c,\delta}(x) := \begin{cases} c & |x-a| \leq \frac{\delta}{2} \\ \in [c, M] & \frac{\delta}{2} \leq |x-a| \leq \delta \\ M & \text{auf } K \setminus \{|x-a| \leq \delta\} \\ \in [0, M] & x \text{ in 1-Umgebung von } K \\ 0 & \text{außerhalb der 1-Umgebung von } K \end{cases}$$

Sei $x_0$ beliebig, $c > f(x_0)$. Also $c = f(x_0) + \varepsilon$ (mit $\varepsilon > 0$). Dann existiert $\delta > 0$ mit

$$|x - x_0| < 2\delta \Longrightarrow f(x) < f(x_0) + \varepsilon = c$$

Für $|a - x_0| \leq \frac{\delta}{2}$ und beliebiges $x$ mit $|x-a| \leq \delta$ folgt also ebenfalls $f(x) < c$. Für solche $c, \delta, a$ gilt also $g_{a,c,\delta} \geq f$.

Zähle nun alle rationalen $(a, c, \delta)$ mit dieser Eigenschaft ab. Dies liefert eine Folge $(a_k, c_k, \delta_k)$. Setze

$$f \leq f_n := \min_{1\leq k\leq n} g_{a_k,c_k,\delta_k}$$

Es bleibt zu klären, ob für alle $x_0$ gilt, dass

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$$

Wir können $c_k \in \mathbb{Q}$ beliebig knapp oberhalb von $f(x_0)$ wählen:

$$f(x_0) < c_k \leq f(x_0) + \varepsilon$$

Wähle dazu auch $\delta_k \in \mathbb{Q}$ und $a_k \in \mathbb{Q}^N$ mit $|a_k - x_0| \leq \frac{\delta_k}{2}$. Dann folgt

$$\forall n \geq k = k(\varepsilon) \ : \ f(x_0) \leq f_n(x_0) \leq g_{a_k,c_k,\delta_k}(x_0) = c_k \leq f(x_0) + \varepsilon$$

Also gilt $f_n(x_0) \searrow f(x_0)$.

$\square$

Den Satz können wir analog im anderen Fall formulieren.

**Satz 7.3.5.** *$f \in \mathcal{H}^{\uparrow}$ genau dann, wenn $f$ uhs ist und ein kompaktes $K$ existiert mit $f \geq 0$ außerhalb von $K$.*

Auch die Bemerkungen lassen sich formulieren, wenn $f$ uhs ist.

**Bemerkung.**

(a)
$$f \text{ ist uhs} \iff \forall x_0 \ : \ f(x_0) \leq \liminf_{x \to x_0} f(x)$$

(b)
$$\begin{aligned} f \text{ ist uhs} &\iff \{f \leq c\} \text{ ist abgeschlossen } (\forall c \in \mathbb{R}) \\ &\iff \{f > c\} \text{ ist offen} \end{aligned}$$

(c)
$$1_A(x) := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \text{ ist uhs} \iff A \text{ ist offen}$$

(d) Sei $I$ eine nicht unbedingt abzählbare Indexmenge.
$$f_i \text{ ist uhs } (\forall i \in I) \implies \sup_i f_i \text{ ist auch uhs}$$

Vorlesung 24.11.09

### 7.3.2 Integral

**Definition 7.3.6.** Sei $f \in \mathcal{H}^{\uparrow}$, d.h. $f_n \nearrow f$ mit $f_n \in \mathcal{C}_c^0\left(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}\right)$ und $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Dann setze
$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x) \, \mathrm{d}x = \lim_{\mathrm{n} \to \infty} \int\limits_{\mathbb{R}^N} f_n(x) \, \mathrm{d}x$$

Für $f \in \mathcal{H}^{\downarrow}$ analog.

**Bemerkung.**

(i) Falls $f \in \mathcal{C}_c^0$, dann erhalten wir wegen Satz 7.3.1 das alte Integral. Also ist die Definition konsistent.

(ii) Dieses Integral ist wohldefiniert, d.h. es hängt nicht von der Wahl der approximierenden Folge $f_n$ ab.

**Beweis:** Sei $\tilde{f}_n \nearrow f$ eine weitere Folge, $\tilde{f}_n \in \mathcal{C}_c^0$. Zeige:
$$\forall n_0 \ : \ \int \tilde{f}_{n_0} \leq \lim_{\mathrm{n} \to \infty} \int f_n$$

Analog dazu dann noch $\forall n_0 \ : \ \int f_{n_0} \leq \lim_{\mathrm{n} \to \infty} \int \tilde{f}_n$ und es gilt die Behauptung.

Wähle $n_0$ beliebig. Definiere (punktweise) eine Folge $g_n \in \mathcal{C}_c^0$ als

$$g_n := \min(\tilde{f_{n_0}}, f_n)$$

Für $n \to \infty$ ist dann auch $g_n \nearrow \tilde{f_{n_0}}$. Wegen (i) und weil $g_n \leq f_n$, haben wir dann

$$\int \tilde{f_{n_0}} = \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \int g_n \leq \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \int f_n$$

$\square$

**Satz 7.3.7.** *Das definierte Integral ist linear (für positive Koeffizienten), translationsinvariant und monoton auf $\mathcal{H}^\uparrow$ bzw. $\mathcal{H}^\downarrow$.*

**Beweis:** Dies ist angesichts der Definition klar, da alle Eigenschaften schon für die approximierenden Folgen gelten und unter Grenzwertbildung erhalten bleiben. $\square$

*NB:* Schreibe nur $\mathcal{H}$ für $\mathcal{H}^\uparrow$ oder $\mathcal{H}^\downarrow$.

**Satz 7.3.8** (Transformation)**.** *Sei $f \in \mathcal{H}$ und $A$ eine invertierbare $N \times N$-Matrix. Dann ist auch $f \circ A \in \mathcal{H}$ und es gilt*

$$|\det A| \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(Ax)\ \mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)\ \mathrm{d}x$$

**Beweis:** Auch hier genügt es zu wissen, dass es für die $f_n$ schon bewiesen wurde. $\square$

**Satz 7.3.9** (*Fubini*)**.** *Sei $f \in \mathcal{H}\left(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}\right)$ und $1 \leq k \leq N$. Dann ist*

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)\ \mathrm{d}x &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x_1, \dots, x_N)\ \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_N \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^{N-k}} \underbrace{\left( \int\limits_{\mathbb{R}^k} \underbrace{f(x_1, \dots, x_N)}_{\mathcal{H}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})}\ \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_k \right)}_{\mathcal{H}(\mathbb{R}^{N-k}, \mathbb{R})} \mathrm{d}x_{k+1} \dots \mathrm{d}x_N\end{aligned}$$

**Beweis:** Schreibe $\xi = (x_1, \dots, x_k), \eta = (x_{k+1}, \dots, x_n)$. Ohne Einschränkung ist $f_n \nearrow f$, $f_n \in \mathcal{C}_c^0$. Dann ist $f_n(\cdot, \eta) \in \mathcal{C}_c^0\left(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}\right)$, also $f_n(\cdot, \eta) \nearrow f(\cdot, \eta) \in \mathcal{H}\left(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}\right)$.

$$F(\eta) := \int\limits_{\mathbb{R}^k} f(\xi, \eta)\ \mathrm{d}\xi = \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^k} f_n(\xi, \eta)\ \mathrm{d}\xi = \lim_{\mathrm{n}\to\infty} F_n(\eta)$$

Es ist $F_n(\eta) \in \mathcal{C}_c^0\left(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}\right)$, also $F(\eta) \in \mathcal{H}\left(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}\right)$.

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)\ \mathrm{d}x &= \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^N} f_n(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^{N-k}} \left( \int\limits_{\mathbb{R}^k} f_n(\xi, \eta)\ \mathrm{d}\xi \right)\ \mathrm{d}\eta \\
&= \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^{N-k}} F_n(\eta)\ \mathrm{d}\eta \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^{N-k}} F(\eta)\ \mathrm{d}\eta \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^{N-k}} \left( \int\limits_{\mathbb{R}^k} f(\xi, \eta)\ \mathrm{d}\xi \right)\ \mathrm{d}\eta
\end{aligned}$$

$\square$

**Satz 7.3.10.**

*(a) Sei $f_k \in \mathcal{H}^\uparrow$, $k \in I$. Dann ist $\sup\limits_{k\in I} f_k \in \mathcal{H}^\uparrow$ und es gilt*

$$\int \sup f_k(x)\ \mathrm{d}x \geq \sup \int f_k(x)\ \mathrm{d}x$$

*(b) Sei $f_n \in \mathcal{H}^\uparrow$, $n \in \mathbb{N}$ und $f_n \nearrow f$. Dann ist $f \in \mathcal{H}^\uparrow$ und es gilt*

$$\int \left( \lim_{\mathrm{n}\to\infty} f_n(x) \right)\ \mathrm{d}x = \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \int f_n(x)\ \mathrm{d}x$$

*(c) Sei $f_n \in \mathcal{H}^\uparrow$, $f_n \geq 0$. Dann gilt*

$$\int \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)\ \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int f_n(x)\ \mathrm{d}x \right)$$

**Beweis:**

(a) $\sup\limits_{k\in I} f_k = f(x)$. Weil $f$ uhs, gilt

$$\forall x\ \forall \varepsilon\ \exists \delta\ :\ f|_{U_\delta(x)} \geq f(x) - \varepsilon$$

und auch

$$\forall k\ \forall x\ \forall \varepsilon\ \exists \delta\ :\ f_k|_{U_\delta(x)} \geq f_k(x) - \varepsilon$$

Wähle $k_n$ so, dass $f_{k_n}(x) \to f(x)$. Dann gilt für $n \geq n_*(\varepsilon)$:

$$f|_{U_{\delta_n}(x)} \geq f_{k_n}|_{U_{\delta_n}(x)} \geq f_{k_n}(x) - \varepsilon \geq f(x) - 2\varepsilon$$

Also ist $f \in \mathcal{H}^\uparrow$.

Da $f_k \leq f$ gilt und das Integral monoton ist, gilt auch $\int f_k \leq \int f$.

(b) Wähle zu jedem $f_n \in \mathcal{H}^\uparrow$ eine Folge $f_{n,k} \in \mathcal{C}_c^0$ so, dass $f_{n,k} \nearrow f_n$ für $k \to \infty$. Definiere dann $g_m \in \mathcal{C}_c^0$:

$$g_m := \max_{n+k=m} f_{n,k} \leq \max_{n \leq m} f_n = f_m$$

Die Folge $g_m$ ist monoton wachsend, da $f_{n,k} \leq f_{n,k+1}$. Zeige also noch, dass $g_m \to f$.

$$\forall x, \varepsilon \; \exists n_0(x,\varepsilon) \; \forall n \geq n_0 \; \exists k_0(x,\varepsilon,n) \; \forall k \geq k_0 \; : \\ f(x) - 2\varepsilon \leq f_n(x) - \varepsilon \leq f_{n,k}(x) \leq g_{n+k}(x) \leq f(x)$$

Also $g_m \nearrow f$ punktweise.

Also

$$\int f = \lim_{m\to\infty} \int g_m \leq \lim_{m\to\infty} \int f_m \leq \int f$$

(c) Folgt aus (b) mit $\tilde{f}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_n$.

□

*NB:* Mit diesem Integral ist kompakten Mengen $M \subseteq \mathbb{R}^N$ ein Volumen zugeordnet ($1_M \in \mathcal{H}^\downarrow$):

$$\mathsf{Vol}(M) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} 1_M(x) \, \mathrm{d}x$$

Genauso lässt sich das Volumen offener Mengen bestimmen ($1_M \in \mathcal{H}^\uparrow$). Eine interessante Frage wäre, welche kompakten Mengen

$$\mathsf{Vol}(M) = \mathsf{Vol}(\mathring{M})$$

erfüllen.

Vorlesung 26.11.09

**Definition 7.3.11.** Sei $K \subseteq \mathbb{R}^N$ kompakt, $f \in \mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})$, außerhalb von $K$ mit $f \equiv 0$ fortgesetzt. Zerlege diese Funktion in

$$f = f^+ - f^-$$

mit $f^\pm \in \mathcal{H}^\downarrow\left(\mathbb{R}^N, [0,\infty)\right)$, beide wieder fortgesetzt als Nullfunktion außerhalb von $K$. Sie können z. B. so gewählt werden:

$$f^\pm(x) := \max\{\pm f(x), 0\}$$

Alternativ kann auch gesagt werden, dass $f^\pm \in \mathcal{C}^0(K,\mathbb{R})$, wieder mit $f^\pm \equiv 0$ fortgesetzt außerhalb von $K$.
Wir definieren das ***Integral auf*** $\mathcal{C}^0(K,\mathbb{R})$ als

$$\int\limits_K f := \int\limits_{\mathbb{R}^N} f^+ - \int\limits_{\mathbb{R}^N} f^-$$

**Bemerkung.**

(i) Dieses Integral ist wohldefiniert. Vergleiche zwei Zerlegungen

$$\begin{aligned} f^+ - f^- &= \tilde{f^+} - \tilde{f^-} \\ f^+ + \tilde{f^-} &= \tilde{f^+} + f^- \end{aligned}$$

Diese Funktionen sind alle aus $\mathcal{H}^\downarrow$, also gilt positive Linearität.

$$\begin{aligned} \int f^+ + \int \tilde{f^-} &= \int \tilde{f^+} + \int f^- \\ \int f^+ - \int f^- &= \int \tilde{f^+} - \int \tilde{f^-} \end{aligned}$$

(ii) Diese Definition gilt auch für beschränkte offene Mengen $U$, sofern die Integrale existieren.

$$\int\limits_U f := \int\limits_{\mathbb{R}^N} f^+ - \int\limits_{\mathbb{R}^N} f^-$$

**Satz 7.3.12.** *Die Abbildung*

$$I(f) := \int\limits_K f$$

*mit* $I : \mathcal{C}^0(K,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *ist linear, monoton, beschränkt und (folglich) stetig auf dem Banachraum* $\mathcal{C}^0(K,\mathbb{R})$.

**Beweis:**

(i) Linearität

Wegen positiver Linearität folgt sofort

$$\int (f+g)^\pm = \int f^\pm + \int g^\pm$$

Mit

$$(\lambda f)^{\pm} := \begin{cases} \lambda f^{\pm} & \lambda > 0 \\ -\lambda f^{\mp} & \lambda < 0 \end{cases}$$

Folgt ebenso

$$\int \lambda f = \lambda \cdot \int f$$

(ii) Monotonie

Einsetzen, z. B. mit

$$f^{\pm} := \max(\pm f, 0)$$

(iii) Beschränktheit

$$\begin{aligned} \left| \int\limits_K f \right| &= \left| \int\limits_{\mathbb{R}^N} f^+ - \int\limits_{\mathbb{R}^N} f^- \right| \\ &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^N} f^+ + \int\limits_{\mathbb{R}^N} f^- \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} (f^+ + f^-) \\ &= \int\limits_K |f| \\ &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^N} 1_K \cdot \sup |f| \\ &= \mathsf{Vol}(K) \cdot \|f\|_\infty \end{aligned}$$

Also beschränkt.

□

**Satz 7.3.13** (Transformationssatz). *Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^N$ offen und weiterhin $\varphi : U \to V$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus, $K \subseteq U$ kompakt und $f \in \mathcal{C}^0(\varphi(K), \mathbb{R})$. Dann gilt*

$$\int\limits_{\varphi(K)} = \int\limits_K (f \circ \varphi) \cdot \left|\det \varphi'\right|$$

**Beweis:** Gegebenenfalls wird $f$ als Nullfunktion außerhalb von $\varphi(K)$ fortgesetzt. Also ist ohne Einschränkung $f \in \mathcal{H}^{\downarrow}$. Wähle eine Folge $f_n \in \mathcal{C}_c$ mit $f_n \searrow f$. Ohne Einschränkung ist dann $\mathsf{supp}(f_n) \subseteq K' \subset V$ kompakt. Aus dem Transformationssatz für die $f_n$ folgt

$$\int\limits_V f_n = \int\limits_U (f_n \circ \varphi) \cdot \left|\det \varphi'\right|$$

Beim Übergang zum Grenzwert gilt also

$$\int_V f = \int_U (f \circ \varphi) \cdot \left|\det \varphi'\right|$$

□

**Beispiel.** Volumina

(i) Sei $K_i \subseteq \mathbb{R}^{m_i}$ kompakt. Dann gilt mit $m := m_1 + m_2$, dass

$$\mathsf{Vol}_m(K_1 \times K_2) = \mathsf{Vol}_{m_1}(K_1) \cdot \mathsf{Vol}_{m_2}(K_2)$$

Man zerlegt zunächst $x \in \mathbb{R}^m$ in $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2}$. Dann gilt

$$1_{K_1 \times K_2}(\xi, \eta) = 1_{K_1}(\xi) \cdot 1_{K_2}(\eta)$$

Nach Fubini gilt dann

$$\begin{aligned}
\mathsf{Vol}_m(K_1 \times K_2) &= \int_{\mathbb{R}^m} 1_{K_1 \times K_2}(\xi, \eta) \;\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \\
&= \int_{\mathbb{R}^{m_1}} \int_{\mathbb{R}^{m_2}} 1_{K_1}(\xi) \cdot 1_{K_2}(\eta) \;\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^{m_1}} 1_{K_1}(\xi) \;\mathrm{d}\xi \cdot \int_{\mathbb{R}^{m_2}} 1_{K_2}(\eta) \;\mathrm{d}\eta \\
&= \mathsf{Vol}_{m_1}(K_1) \cdot \mathsf{Vol}_{m_2}(K_2)
\end{aligned}$$

Insbesondere gilt

$$\mathsf{Vol}_N\left([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_N, b_N]\right) = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_N - a_N)$$

Das folgt daraus, dass nach dem Transformationssatz für alle $Q \subseteq \mathbb{R}^N$ kompakt und alle $(N \times N)$-Matrizen $A$ mit $\det A \neq 0$ gilt

$$\mathsf{Vol}(AQ) = \mathsf{Vol}(Q) \cdot |\det A|$$

Speziell gilt außerdem für Parallelepipede mit $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{R}^N$, dass

$$\mathsf{Vol}\left\{\sum_{i=1}^N t_i a_i \,\middle|\, 0 \leq t_i \leq 1\right\} = |\det(a_1 \ldots a_N)|$$

Betrachte dazu den 1-Würfel $Q = \{\underline{t} \mid 0 \leq t_i \leq 1 \quad i = 1, \ldots, N\}$. Es gilt dann

$$\mathsf{Vol}(AQ) = \underbrace{\mathsf{Vol}(Q)}_{=1} \cdot |\det A|$$

(ii) Sei $K = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^N \,\middle|\, \sum x_i^2 \leq 1 \right\}$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Vol}_N(K) &= \int 1_K \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \ldots \int_0^{\pi} r^{N-1} \cdot \sin \alpha_{N_2} \cdot \ldots \cdot (\sin \alpha_1)^{N-2} \; \mathrm{d}\alpha_1 \ldots \mathrm{d}\alpha_{N_2} \mathrm{d}\alpha_{N-1} \mathrm{d}r \\
&= \mathsf{Vol}_{N-2}(K) \cdot \frac{\int_0^1 r^{N-1} \; \mathrm{d}r}{\int_0^1 r^{N-3} \; \mathrm{d}r} \cdot 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{N-3} \; \mathrm{d}t \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{N-2} \; \mathrm{d}t \\
&= \mathsf{Vol}_{N-2}(K) \cdot \frac{N-2}{N} \cdot 4 \cdot s_{N-3} \cdot s_{N-2} \\
&= \mathsf{Vol}_{N-2}(K) \cdot \frac{\cancel{N-2}}{N} \cdot 4 \cdot \cancel{\frac{(N-4) \cdot (N-6) \cdot \ldots}{(N-3) \cdot (N-5) \cdot \ldots}} \cdot \cancel{\frac{(N-3) \cdot (N-5) \cdot \ldots}{(N-2) \cdot (N-4) \cdot \ldots}} \cdot \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{2\pi}{N} \cdot \mathsf{Vol}_{N-2}(K)
\end{aligned}
$$

Um zu verstehen warum die Integrale durch Quotienten ersetzt werden, sollte man unter dem Stichwort „Wallis-Produkt“ notfalls noch einmal nachschlagen.

Mit Hilfe der $\Gamma$-Funktion

$$
\Gamma(\alpha) := \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} \cdot e^{-t} \; \mathrm{d}t
$$

kann das Volumen auch durch

$$
\widetilde{\mathsf{Vol}_N}(K) = \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right)}
$$

beschrieben werden. Wir wollen nun zeigen, dass beide Versionen das gleiche Ergebnis liefern. Dazu vergleichen wir zunächst die Anfangswerte.

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Vol}_1(K) &= 2 \\
\mathsf{Vol}_2(K) &= \pi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathsf{Vol}_1}(K) &= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{\cancel{\sqrt{\pi}}}{\frac{1}{2} \cdot \cancel{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}} = 2 \\
\widetilde{\mathsf{Vol}_2}(K) &= \frac{\pi}{\Gamma(2)} = \pi
\end{aligned}
$$

Nun überprüfen wir noch die Rekursion

$$
\frac{2\pi}{N} \cdot \widetilde{\mathsf{Vol}_{N-2}}(K) = \frac{2\pi}{N} \cdot \frac{\pi^{\frac{N}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}-1+1\right)} = \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right)} = \widetilde{\mathsf{Vol}_N}(K)
$$

## 7.4 (Unter-)Mannigfaltigkeiten

Vorlesung 01.12.09

### 7.4.1 Karten und Atlas

Sei stets

$$0 \in U \subseteq \mathbb{R}^m$$
$$a \in V \subseteq M \subseteq \mathbb{R}^N$$

Dabei sind $U, V$ offen in $\mathbb{R}^m$ bzw. $M$ und es sei weiterhin $1 \leq m \leq N$.

**Definition 7.4.1.** Eine $\mathcal{C}^k$-Abbildung $\varphi : U \to \mathbb{R}^N$ heißt ***$\mathcal{C}^k$-Immersion***, wenn $\mathcal{D}\varphi(x) \in M(N \times m, \mathbb{R})$ vollen Rang $m$ besitzt, und zwar für alle $x \in U$.

**Definition 7.4.2.** Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^N$ heißt ***$\mathcal{C}^k$-Untermannigfaltigkeit*** der Dimension $m$, falls für alle $a \in M$ eine in $M$ offene Umgebung $V_a \subseteq M$, eine in $\mathbb{R}^m$ offene Umgebung $U_a$ von 0 sowie eine $\mathcal{C}^k$-Immersion $\varphi : U_a \to \mathbb{R}^N$ existieren, mit $\varphi_a : U_a \to V_a$ ist Homöomorphismus.
$\varphi_a$ heißt dann ***Karte*** von $M$ in $V_a$.

**Definition 7.4.3.** Ein ***Atlas*** von $M$ ist eine Menge von Karten, deren Bildbereiche $M$ überdecken. Das heißt

$$\bigcup_{a \in I} V_a = M \Longrightarrow \{\varphi_a \mid a \in I\} \text{ ist Atlas}$$

**Definition 7.4.4.** Sei $\varphi$ Karte und $a = \varphi(0)$. Dann heißt der $m$-dimensionale Unterraum

$$T_a M := \text{Bild } \mathcal{D}\varphi(0)$$

***Tangentialraum*** an $M$ im Punkt $a$.
$TM = (T_a M)$ heißt ***Tangentialbündel***.
Ein ***Normalenvektor*** $n \in \mathbb{R}^N$ im Punkt $a$ ist ein (Einheits-)Vektor, der auf $T_a M$ senkrecht steht.

**Definition 7.4.5.**

$$(g_{ij})_{1 \leq i,j \leq m}(x) = \varphi'(x)^T \cdot \varphi'(x)$$

heißt ***metrischer Tensor***.

$$g = g(x) = \det(g_{ij})$$

heißt ***Gram'sche Determinante***.

**Bemerkung.**

(i) $T_aM$ ist die Menge der Tangentialvektoren $\dot\alpha(0)$ an differenzierbare Kurven

$$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$$

mit $\alpha(0) = a$.
Mit $\gamma = \varphi^{-1} \circ \alpha$ gilt

$$\alpha(t) = \varphi(\gamma(t))$$
$$\dot\alpha(t) = \mathcal{D}\varphi(0) \cdot \gamma'(0)$$

Setze umgekehrt zu $b \in \mathbb{R}^m$:

$$\alpha(t) := \varphi(b \cdot t)$$

(ii) Seien $b_1, b_2$ gegeben, $b_k \cdot t \in U$ und $\alpha_k(t) = \varphi(b_k \cdot t)$. Dann ist

$$(g_{ij}(0))\,[b_k, b_k] = \|\dot\alpha_k(0)\|_2^2$$

Falls $\|\dot\alpha_k(0)\| = 1$, so gilt

$$(g_{ij}(0))\,[b_1, b_2] = b_1^T \cdot (g_{ij}(0)) \cdot b_2 = \dot\alpha_1(0)^T \cdot \dot\alpha_2(0)$$

(Riemannsche Geometrie)

**Satz 7.4.6.** *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^N$ eine $\mathcal{C}^k$-Untermannigfaltigkeit der Dimension $m$ und $a \in M$ beliebig. Dann existieren eine Umgebung $U'$ von 0 in $\mathbb{R}^N$, eine Umgebung $V'$ von $a$ in $\mathbb{R}^N$, sowie ein $\mathcal{C}^k$-Diffeomorphismus $F : V' \to U'$ mit $F(M \cap V') = (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap U'$.*

*NB:* Insbesondere ist $M$ lokal als Lösung der $N - m$ Gleichungen

$$F_{m+1}(x) = \ldots = F_N(x) = 0$$

mit $\frac{\partial(F_{m+1},\ldots,F_N)(x)}{\partial x}$ surjektiv beschrieben.
Umgekehrt definieren solche Systeme von $N - m$ Gleichungen in $N$ Unbekannten auch $m$-dimensionale Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^N$.

**Beweis:** Es ist also zu zeigen, dass die Definition von Untermannigfaltigkeiten äquivalent zur Aussage des Satzes ist, also

$$\text{Definition} \iff \text{Satz}$$

„$\Leftarrow$": Ohne Einschränkung ist $\frac{\partial(F_{m+1},\ldots,F_N)(x)}{\partial(x_{m+1},\ldots,x_N)}$ ein Isomorphismus. Per implizitem Funktionensatz wissen wir, dass $(F_{m+1}, \ldots, F_N) = 0$ genau dann lokal nahe $x = a$ auflösbar ist, wenn

$$(x_{m+1}, \ldots, x_N) = \rho(x_1, \ldots, x_m)$$

geschrieben werden kann. Setze

$$\varphi = \begin{pmatrix} \mathsf{id}_m \\ \rho \end{pmatrix}$$

Es ist dann $M = \mathsf{graph}(\rho)$. $U, V$ ergeben sich aus der geforderten lokalen Nähe zu $a$.

„$\Rightarrow$“: Ohne Einschränkung ist $\frac{\partial(\varphi_1,\ldots,\varphi_m)}{\partial(t_1,\ldots,t_m)}(0)$ ein Isomorphismus, mit $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^N$ und $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_N)$. Setze $\Phi : U \times \mathbb{R}^{N-m} \to \mathbb{R}^N$ als

$$\Phi_k(t_1, \ldots, t_N) := \begin{cases} \varphi_k(t_1, \ldots, t_m) & 1 \leq k \leq m \\ \varphi_k(t_1, \ldots, t_m) + t_k & m+1 \leq k \leq N \end{cases}$$

Dann ist

$$\mathcal{D}\Phi = \begin{pmatrix} \varphi' & \begin{matrix} 0 \\ \mathsf{id} \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Also ist $\Phi : U_1 \to V_1$ ein $\mathcal{C}^k$-Diffeomorphismus und $F := \Phi^{-1}$ ebenfalls.

Zeige noch:

$$\Phi\left(\mathbb{R}^m \times \{0\} \cap U'\right) = M \cap V'$$

„$\subseteq$“ ist dabei trivial, denn sicher ist $\Phi\left((\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap U_1\right) \subseteq M \cap V_1$. Bei „$\supseteq$“ benutzt
Vorlesung 03.12.09
man, dass $\varphi$ Homöomorphismus ist.

$U_1, V_1$ wurden so gewählt, dass $\Phi : U_1 \to V_1$ ein $\mathcal{C}^k$-Diffeomorphismus ist. Wähle $U_1$ so klein, dass $U_1 \subseteq U_a \times \mathbb{R}^{N-m}$, d. h. $\varphi : U_a \to V_a$ ist Karte und somit Homöomorphismus. Setze

$$\underbrace{\tilde{U_a}}_{\in\mathbb{R}^m} \times \{0\} := \underbrace{U_1}_{\in\mathbb{R}^N} \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$$

Dann ist $\tilde{U_a} \subseteq U_a$ und $\tilde{U_a}$ offen. Da $\varphi : \tilde{U_a} \to \tilde{V_a} := \varphi(\tilde{U_a})$ ein Homöomorphismus ist, existiert $V_2 \subseteq \mathbb{R}^N$ offen so, dass

$$\tilde{V_a} = M \cap V_2$$

Setze $V' := V_1 \cap V_2 \subseteq \mathbb{R}^N$ offen und $U' := \Phi^{-1}(V')$. Nun sind alle Mengen passend und es ist $\Phi : U' \to V'$ ein $\mathcal{C}^k$-Diffeomorphismus.

Jetzt kann also nachgerechnet werden. Zunächst stellen wir fest, dass wegen

$$\tilde{U_a} \times \{0\} \subseteq U_1$$

auch $\tilde{V_a} \subseteq V_1$. Dann ist

$$\tilde{V_a} = \tilde{V_a} \cap V_1 = M \cap V_1 \cap V_2 = M \cap V'$$

Also gilt nun

$$\Phi\underbrace{\left((\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap U'\right)}_{=\tilde{U_a} \times \{0\}} = \varphi(\tilde{U_a}) = \tilde{V_a} = M \cap V'$$

$\square$

Als nächstes beschäftigen wir uns mit Kartenwechsel.

**Satz 7.4.7.** *Seien $\varphi, \tilde{\varphi}$ beides $\mathcal{C}^k$-Karten zur Umgebung $V$ von $a = \varphi(0) = \tilde{\varphi}(0)$ in $M$. Dann ist der Kartenwechsel (die Koordinatentransformation)*

$$\tau := \tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi$$

*mit $\tau : U \to \tilde{U}$ ein $\mathcal{C}^k$-Diffeomorphismus.*
*Beide Karten liefern denselben Tangentialraum und dieselben Normalen an $M$.*
*Die metrischen Tensoren $g, \tilde{g}$ transformieren sich:*

$$\begin{aligned}(g_{ij})(x) &= \left(\tau'(x)\right)^T \cdot \tilde{g}_{ij}(\tau(x)) \cdot \tau'(x)\\ g &= \left|\det \tau'\right|^2 \cdot \tilde{g}\end{aligned}$$

**Beweis:** Beschreibe $\tilde{\varphi}$ durch $\tilde{F}$ wie im vorigen Satz. Dann ist

$$\tau = \tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi = \tilde{F} \circ \varphi = \left(\tilde{F}_1, \ldots, \tilde{F}_m\right) \circ \varphi \in \mathcal{C}^k$$

Weiterhin sind $\tilde{\varphi}, \varphi$ Homöomorphismen. Also ist $\tau$ ebenfalls einer und deshalb invertierbar.

$$\tau^{-1} = \varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi} = (F_1, \ldots, F_m) \circ \tilde{\varphi} \in \mathcal{C}^k$$

Also ist $\tau$ ein $\mathcal{C}^k$-Diffeomorphismus.
Nun rechnen wir noch die Transformation der Tensoren nach.

$$\begin{aligned}g_{ij}(x) &= \varphi'(x)^T \cdot \varphi'(x)\\ &= \left(\tilde{\varphi}'(\tau(x))\tau'(x)\right)^T \cdot \left(\tilde{\varphi}'(\tau(x))\right) \tau'(x)\\ &= \tau'(x)^T \underbrace{\left(\tilde{\varphi}'(\tau(x))\right)^T \tilde{\varphi}'(\tau(x))}_{\tilde{g}_{ij}(\tau(x))} \tau'(x)\end{aligned}$$

□

**Bemerkung.** Für $N \times m$-Matrizen $A, B$ gilt

$$\det A^T B = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots i_m \leq N} \det \begin{pmatrix} A_{i_1} \\ \vdots \\ A_{i_m} \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} B_{i_1} \\ \vdots \\ B_{i_m} \end{pmatrix}$$

Beide Seiten sind (alternierend) multilinear in $B$-Zeilen. Für $B = (e_{i_1}, \ldots, e_{i_m})$ mit $e_{i_k} \in \mathbb{R}^N$ gilt

$$A^T B = \begin{pmatrix} A_{i_1} \\ \vdots \\ A_{i_m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{i_1} \\ \vdots \\ B_{i_m} \end{pmatrix}$$

Dies erfüllt also die Gleichung.

### 7.4.2 Integral

Vorlesung

**Definition 7.4.8** (lokal). Sei $\varphi : U \to V$ eine Karte zur Mannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^N$ mit $\dim M = m$. Sei weiterhin $f \in \mathcal{H}_c(V, \mathbb{R})$, d. h. $f \in \mathcal{H}$ mit kompaktem Träger in $V$ (also $\mathsf{supp}(f) \subseteq V$). Definiere dann

$$\int\limits_M f \, \mathrm{d}S := \int\limits_U (f \circ \varphi)(x) \cdot \sqrt{g(x)} \, \mathrm{d}x$$

**Lemma 7.4.9.** *Die lokale Definition hängt nicht von der Wahl der Karte ab. Genauer heißt das: Sei $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \to \tilde{V} \subseteq M$ eine andere Karte und $f \in \mathcal{H}_c(V \cap \tilde{V}, \mathbb{R})$. Dann gilt*

$$\int\limits_U (f \circ \varphi) \cdot \sqrt{g} = \int\limits_{\tilde{U}} (f \circ \tilde{\varphi}) \cdot \sqrt{\tilde{g}}$$

**Beweis:** Auf Grund des Transformationssatzes mit $y = \tau(x)$ gilt

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\tilde{U}} (f \circ \tilde{\varphi})(y) \cdot \sqrt{\tilde{g}(y)} \, \mathrm{d}y &= \int\limits_U f\left(\tilde{\varphi}(\tau(x))\right) \cdot \sqrt{\tilde{g}(\tau(x)) \cdot |\det \tau'(x)|^2} \, \mathrm{d}x \\
&= \int\limits_U (f \circ \varphi)(x) \cdot \sqrt{g(x)} \, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

□

Um dieses Integral auch global definieren zu können, ist ein Exkurs über Zerlegungen der 1 (engl.: partition of unity) nötig.

**Definition 7.4.10.** Sei $M \subseteq \mathbb{R}^N$ abgeschlossen mit (eventuell überabzählbarer) offener Überdeckung.

$$M \subseteq \bigcup_\mu V_\mu$$

Existiert eine offene Überdeckung durch abzählbar viele relativ kompakte Mengen,

$$M \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \tilde{V}_i$$

so nennen wir diese Überdeckung ***Verfeinerung***, falls gilt

$$\forall i \ \exists \mu \ : \ \tilde{V}_i \subseteq V_\mu$$

Gilt für ein beliebiges $x$, dass $x \in \tilde{V}_i$ nur für endlich viele $i$ stimmt, so nennen wir die Verfeinerung ***lokal endlich***.
Wir sagen, dass zu einer lokal endlichen Verfeinerung $\tilde{V}_i$ eine ***Zerlegung der 1*** existiert, falls $\alpha_i \in \mathcal{C}^\infty(V_i, [0,1])$ existieren mit

- $\mathsf{supp}(\alpha_i) \subseteq \tilde{V}_i$

- $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i \equiv 1$ auf $M$

Eine ebenfalls offene Überdeckung $W_i$ von $M$ heißt ***Schrumpfung*** der offenen Überdeckung $\tilde{V}_i$, falls gilt

$$\overline{W_i} \subset \tilde{V}_i$$

**Lemma 7.4.11** (ohne Beweis). *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^N$ abgeschlossen mit (eventuell überabzählbarer) offener Überdeckung.*

$$M \subseteq \bigcup_{\mu} V_\mu$$

*Dann existiert eine lokal endliche Verfeinerung $\tilde{V}_i$ und dazu eine Zerlegung der 1 sowie eine Schrumpfung $W_i$, etwa $W_i := \{\alpha_i > 0\}$.*

Nun kehren wir zum ursprünglichen Problem zurück.

**Definition 7.4.12** (global). Sei $M \subseteq \mathbb{R}^N$ eine Mannigfaltigkeit mit (lokal) endlichem Atlas $\varphi_i : U_i \to V_i$ und einer zugehörigen 1-Zerlegung $\alpha_i \in \mathcal{C}^\infty$. Für $f \in \mathcal{H}(M, \mathbb{R})$ definiere dann

$$\int\limits_M f \, \mathrm{d}S := \sum_i \int\limits_{U_i} \left((\alpha_i \cdot f) \circ \varphi_i\right)(x) \cdot \sqrt{g_i(x)} \, \mathrm{d}x$$

Durch einsetzen der lokalen Definition ist dies gleichbedeutend mit

$$\int\limits_M f \, \mathrm{d}S = \sum_i \int\limits_M (\alpha_i \cdot f) \, \mathrm{d}S$$

**Lemma 7.4.13.** *Die globale Definition hängt nicht von der Wahl des Atlanten und der 1-Zerlegung ab.*

**Beweis:** Wir gehen zunächst von endlichen Atlanten aus. Betrachte

$$\int f \, \mathrm{d}S := \sum_i \int\limits_M (\alpha_i \cdot f) \, \mathrm{d}S$$

zu $\varphi_i : U_i \to V_i$ und

$$\widetilde{\int} f \, \mathrm{d}S := \sum_j \int\limits_M (\tilde{\alpha}_j \cdot f) \, \mathrm{d}S$$

zu $\tilde{\varphi}_j : \tilde{U}_j \to \tilde{V}_j$.
Auf $M$ gilt (für alle $i, j$), dass

$$\sum_j \alpha_i \tilde{\alpha}_j = \alpha_i \qquad \text{und} \qquad \sum_i \alpha_i \tilde{\alpha}_j = \tilde{\alpha}_j$$

Nun setzen wir ein:

$$
\begin{aligned}
\int f \, \mathrm{d}S &= \sum_i \int_M \left( \left( \sum_j \alpha_i \tilde{\alpha}_j \right) \cdot f \right) \, \mathrm{d}S \\
&= \sum_{i,j} \int_M (\alpha_i \cdot \tilde{\alpha} \cdot f) \, \mathrm{d}S
\end{aligned}
$$

Es ist aber $\mathsf{supp}(\alpha_i \cdot \tilde{\alpha} \cdot f) \subseteq V_i \cap \tilde{V}_j$. Also dürfen wir die lokale Definition verwenden. Mit dem lokalen Lemma und durch anschließendes „Rückwärtsgehen" erhalten wir dann

$$
\begin{aligned}
\int f \, \mathrm{d}S &= \sum_{i,j} \int_{U_i} ((\alpha_i \cdot \tilde{\alpha} \cdot f) \circ \varphi_i) \cdot \sqrt{g_i} \\
&= \sum_{i,j} \int_{\tilde{U}_i} ((\alpha_i \cdot \tilde{\alpha} \cdot f) \circ \tilde{\varphi}_i) \cdot \sqrt{\tilde{g}_i} \\
&= \sum_j \int_M \left( \left( \sum_i \alpha_i \tilde{\alpha}_j \right) \cdot f \right) \, \mathrm{d}S \\
&= \widetilde{\int} f \, \mathrm{d}S
\end{aligned}
$$

Ist die Überdeckung nicht endlich, so betrachte die Konvergenz. □

### 7.4.3 Kurven und Bogenlänge

**Definition 7.4.14.** Eine $\mathcal{C}^k$***-Kurve*** ist eine $\mathcal{C}^k$-Abbildung $\alpha : I \to \mathbb{R}^N$ mit Tangentialvektor $\alpha'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. $I \subseteq \mathbb{R}$ ist ein Intervall. Oft nennt man auch das Bild von $\alpha$ Kurve.

**Bemerkung.** Eine Kurve darf sich selbst schneiden.
Folgende Kurven sind Mannigfaltigkeiten $M$ $(\dim M = 1)$:

(a) geschlossene $\mathcal{C}^1$-Kurven, wenn $\alpha$ injektiv, $I = [0, 1]$, außer es ist $\alpha(0) = \alpha(1)$, $\alpha'(0) = \alpha'(1)$

(b) Immersionen von $\mathbb{R}$, die „***eigentlich***" (engl.: proper) sind, d. h.

$$\alpha^{-1}(\mathrm{kpt}) = \mathrm{kpt}$$

**Definition 7.4.15.** Die Kurve $\alpha : I \to \mathbb{R}^N$ sei eine eingebettete eindimensionale Mannigfaltigkeit. Für $a, b \in I$ mit $a < b$ ist durch

$$s([a, b]) := \int_a^b \left\| \alpha'(t) \right\|_2 \, \mathrm{d}t$$

die ***Länge des Bogens*** von $a$ nach $b$ auf der Kurve $\alpha$ definiert.

Tatsächlich gilt mit $M := \mathrm{Bild}(\alpha)$ und $f := 1_{\alpha([a,b])}$, dass

$$\int_M 1_{\alpha([a,b])} \, \mathrm{d}S = \int_a^b 1 \cdot \sqrt{g(t)} \, \mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{\|\alpha'(t)\|_2^2} \, \mathrm{d}t$$

denn

$$g(t) = \cancel{\det} \underbrace{\left(\alpha'(t)^T \alpha'(t)\right)}_{\text{Skalarprodukt}}$$

Wegen Vorlesung 10.12.09

$$s(t) := \int_{t_0}^{t} \left\|\alpha'(\tau)\right\|_2 \, \mathrm{d}\tau$$

gilt für die Ableitung

$$s'(t) = \left\|\alpha'(t)\right\|_2 > 0$$

Also ist die Abbildung $t \mapsto s(t)$ ein Diffeomorphismus. Wir können also Kurven statt durch irgendein $t$ auch durch ihre eigene Bogenlänge parametrisieren.

**Satz 7.4.16.** *Sei $\alpha = \alpha(s)$ durch die Bogenlänge $s$ parametrisiert. Dann gilt*

*(i)* $\|\dot\alpha\|_2 = 1$; $\dot\alpha$ *ist der Einheits-Tangentenvektor.*

*(ii)* $\ddot\alpha \perp \dot\alpha$

*Man nennt die Länge $\kappa := \|\ddot\alpha\|_2$ die* **Krümmung** *der Kurve.*

*(iii) Für allgemeine Parameter $\tilde\alpha(t) = \alpha(s(t))$ ebener Kurven gilt*

$$\kappa = \frac{|\det(\tilde\alpha', \tilde\alpha'')|}{\|\tilde\alpha'\|_2^3}$$

**Beispiel.** Gegeben sei ein Kreis mit Radius $R$ und

$$\alpha(s) = R \cdot \begin{pmatrix} \cos \frac{s}{R} \\ \sin \frac{s}{R} \end{pmatrix}$$

Dann ist $s$ bereits die Bogenlänge, weil

$$\left\| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \, \alpha(s) \right\|_2 = 1$$

Insbesondere wird der Kreisumfang durchlaufen bei minimaler Periode $s = 2\pi R$ von $\alpha(s)$, d. h. der Kreisumfang ist $s = 2\pi R$. Die Krümmung beträgt $\kappa = \|\ddot\alpha\| = \frac{1}{R}$.

**Beweis:**

(i) Weil $\alpha(s)$ über die Bogenlänge $s$ parametrisiert ist, gilt

$$s = \int_0^s \|\dot{\alpha}(\tau)\|_2 \, \mathrm{d}\tau$$

Ableiten ergibt dann

$$1 = \|\dot{\alpha}(s)\|_2$$

(ii) Wir formen zunächst die Gleichung von eben um.

$$1 = \|\dot{\alpha}(s)\|_2 = \|\dot{\alpha}(s)\|_2^2 = \dot{\alpha}^T \cdot \dot{\alpha}$$

Nochmaliges Ableiten liefert dann

$$0 = 2 \cdot \dot{\alpha}^T \cdot \ddot{\alpha}$$

(iii) Hierfür sind zwei Schritte nötig. Zunächst zeigen wir, dass die rechte Seite nicht von der Parametrisierung der Kurve abhängt. Anschließend wird nachgewiesen, dass im Falle $t = s$, d. h. $\tilde{\alpha} = \alpha$ die rechte Seite $\kappa$ ist.

*1. Schritt:* Sei $\tilde{\alpha}(t) = \alpha(s(t))$ und $s(t)$ dabei nicht unbedingt die Bogenlänge. Wenn wir Ableitungen nach $s$ mit Punkten und solche nach $t$ mit Strichen kennzeichnen, stellen wir fest:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}' &= \dot{\alpha} \cdot s' \\ \tilde{\alpha}'' &= \ddot{\alpha} \cdot (s')^2 + \dot{\alpha} \cdot s'' \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\frac{|\det(\tilde{\alpha}', \tilde{\alpha}'')|}{\|\tilde{\alpha}'\|_2^3} = \frac{\left|\det(\dot{\alpha} \cdot s', \ddot{\alpha} \cdot (s')^2 + \dot{\alpha} \cdot s'')\right|}{\|\dot{\alpha} \cdot s'\|_2^3}$$

Durch Anwenden der Rechenregeln kürzt sich alles Ungewollte heraus.

*2. Schritt:* Hierfür gilt nun, unter Anwendung von (i) und (ii), dass

$$\frac{|\det(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha})|}{\|\dot{\alpha}\|_2^3} = \frac{(\dot{\alpha}^\perp, \ddot{\alpha})}{1^3} = \|\ddot{\alpha}\| = \kappa$$

□

**Beispiel.** Der Graph der reellen Funktion $t \mapsto f(t) \in \mathbb{R}$ hat Bogenlänge

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{1 + (t'(\tau))^2} \, \mathrm{d}\tau$$

denn es ist

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$$

### Exkurs: Das Polar-Planimeter(1854) von *Amsler*(1823-1912)

*Ziel:* Bastle einen Apparat, der eine geschlossene Kurve $\beta(t)$ umfährt und auf einem Rädchen die Fläche innerhalb von $\beta$ anzeigt.
*Idee:* Zwei Stäbe der Länge $R, L$ sind im Punkt $E$ durch ein Gelenk verbunden. Das andere Ende von $R$ ist im „Pol“ fixiert, das andere Ende von $L$ fährt die gegebene Kurve $\beta(t)$ nach. An einem vertikal zu $L$ mittig montierten Rädchen lässt sich die Fläche innerhalb von $\beta$ ablesen.
Betrachte „beliebige“ Kurven $\alpha(t), \beta(t)$ mit der Eigenschaft, dass

$$\|\beta(t) - \alpha(t)\|_2 = L$$

Die auf dem $L$-Arm liegenden Punkte sind mit $0 \leq t \leq t_{\text{hin}}$ und $0 \leq \tau \leq 1$ gegeben durch

$$\varphi(t,\tau) := \alpha(t) + \tau \cdot (\beta(t) - \alpha(t))$$

Wir setzen einfachheitshalber voraus, dass $\varphi$ ein Diffeomorphismus ist. Dann gilt für die von $L$ überschriebene Fläche mit Hilfe des Transformationssatzes

$$\begin{aligned}
A_{\text{hin}} &= \int\limits_{A_{\text{hin}}} 1 \\
&= \int\limits_0^{t_{\text{hin}}} \int\limits_0^1 \left|\det\left(\varphi'(t,\tau)\right)\right| \, \mathrm{d}\tau \mathrm{d}t \\
&= \int\limits_0^{t_{\text{hin}}} \int\limits_0^1 \left|\det\left(\alpha_t + \tau \cdot (\beta_t - \alpha_t), \beta - \alpha\right)\right| \, \mathrm{d}\tau \mathrm{d}t \\
&= \int\limits_0^{t_{\text{hin}}} \int\limits_0^1 \left|\det\left(\alpha_t, \beta - \alpha\right) + \tau \cdot \det\left(\beta_t - \alpha_t, \beta - \alpha\right)\right| \, \mathrm{d}\tau \mathrm{d}t \\
&= \int\limits_0^{t_{\text{hin}}} \left|\det\left(\alpha_t + \frac{1}{2} \cdot (\beta_t - \alpha_t), \beta - \alpha\right)\right| \, \mathrm{d}t \\
&= \int\limits_0^{t_{\text{hin}}} \left|\det\left(\frac{1}{2} \cdot (\alpha_t + \beta_t), \beta - \alpha\right)\right| \, \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Da wir uns im Planaren bewegen, können wir zum Skalarprodukt übergehen.

$$A_{\text{hin}} = \int\limits_0^{t_{\text{hin}}} \left|\left(\frac{1}{2} \cdot (\alpha_t + \beta_t), (\beta - \alpha)^{\perp}\right)\right| \, \mathrm{d}t$$

Dabei ist aber $\frac{1}{2} \cdot (\alpha_t + \beta_t)$ die Geschwindigkeit $v(t)$ des Rädchens und wenn wir mit $\underline{n}$ die Normale zu $L$ bezeichnen, dann ist $(\beta - \alpha)^\perp = L \cdot \underline{n}$.

$$A_{\text{hin}} = \int_0^{t_{\text{hin}}} L \cdot v(t) \, \mathrm{d}t$$

Dieses Integral ist aber gerade der Hinweg des Rädchens.

$$A_{\text{hin}} = L \cdot s_{\text{hin}}$$

Der Rückweg berechnet sich genauso.

$$A_{\text{rück}} = L \cdot s_{\text{rück}}$$

Wir erhalten dann

$$A_{\text{hin}} - A_{\text{rück}} = L \cdot s_{\text{Rad}} = \text{Fläche}(\beta) - \text{Fläche}(\alpha)$$

Kehren wir nun zu unserem konkreten Apparat zurück. Da es sich um ein *Polar*planimeter handelt, ist die Kurve $\alpha$ ein Kreissegment. Deshalb ist $\text{Fläche}(\alpha) = 0$.
Eine andere Konstruktion arbeitet mit einer Geraden für $\alpha$. Auch hier ist natürlich wieder $\text{Fläche}(\alpha) = 0$.

Vorlesung 15.12.09

### Exkurs: Evolute und Evolvente

Gegeben seien glatte, ebene Kurven $\alpha(s), \beta(\sigma)$, die über ihre jeweilige Bogenlänge $s, \sigma$ parametrisiert sind. Zu $\alpha(s)$ assoziieren wir die ***Evolute*** als

$$\eta_\alpha(s) := \alpha(s) + \frac{\ddot{\alpha}(s)}{\|\ddot{\alpha}(s)\|_2^2}$$

Dies sind die Mittelpunkte der Krümmungskreise zu $\alpha$. Es gilt

$$\left\| \frac{\ddot{\alpha}(s)}{\|\ddot{\alpha}(s)\|_2^2} \right\|_2^2 = \frac{\|\ddot{\alpha}(s)\|_2}{\|\ddot{\alpha}(s)\|_2^2} = \frac{1}{\|\ddot{\alpha}(s)\|_2} = \frac{1}{\kappa}$$

Zu $\beta(\sigma)$ assoziieren wir die ***Evolvente*** als

$$h_\beta(\sigma) := \beta(\sigma) + (R - \sigma) \cdot \beta'(\sigma)$$

Diese Funktion beschreibt die Punkte eines ab $\sigma$ auf $\beta$ straff aufgewickelten Fadens der konstanten Länge $R$.

**Satz 7.4.17** (*Courant*). *Seien $\alpha, \beta \subseteq \mathbb{R}^2$ glatte Kurven und $\ddot{(\alpha)} \neq 0$. Dann gilt für die Evolute $\eta_\alpha$ von $\alpha$ und die Evolvente $h_\beta$ von $\beta$*

*(i)* $\dot{\eta}_\alpha(s) \perp \dot{\alpha}(s)$

*(ii)* $h'_\beta(\sigma) \perp \beta'(\sigma)$

*(iii)* *Die Evolvente der Evolute von $\alpha$ ist (ggf.) $\alpha$ selbst. Genauer heißt das: Wähle $\beta(\sigma) := \eta_\alpha(s)$, Evolute von $\alpha$, reparametrisiert nach der Bogenlänge. Dann ist $\tilde{\alpha}(s) := h_\beta(\sigma)$, Evolvente der Evolute $\beta = \eta$, reparametrisiert nach der Bogenlänge, gegeben durch $\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s)$, wenn wir bei $s = \sigma = 0$ folgerichtig*

$$R = \frac{1}{\kappa_\alpha(0)}$$

*wählen.*

**Beweis:**

(i) Wir wissen, dass für die Kurve $\alpha$ die Gleichung

$$\dot{\alpha}^T \cdot \ddot{\alpha} = 0$$

gilt. Leiten wir nun erneut ab, so erhalten wir

$$\ddot{\alpha}^T \cdot \ddot{\alpha} + \dot{\alpha}^T \cdot \frac{\mathrm{d}^3\alpha}{\mathrm{d}s^3} = 0$$

Hiermit und mit Hilfe der Quotientenregel können wir nun die Rechnung durchführen.

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha}^T \cdot \dot{\eta} &= \dot{\alpha}^T \cdot \left( \dot{\alpha} + \frac{\frac{\mathrm{d}^3\alpha}{\mathrm{d}s^3} \cdot \|\ddot{\alpha}\|_2^2 - \ddot{\alpha} \cdot \left(2 \cdot \ddot{\alpha}^T \cdot \frac{\mathrm{d}^3\alpha}{\mathrm{d}s^3}\right)}{\|\ddot{\alpha}\|_2^4} \right) \\
&= 1 + \|\ddot{\alpha}\|_2^{-2} \cdot \underbrace{\dot{\alpha}^T \cdot \frac{\mathrm{d}^3\alpha}{\mathrm{d}s^3}}_{-\|\ddot{\alpha}\|_2^2} - \underbrace{\dot{\alpha}^T \cdot \ddot{\alpha}}_{0} \cdot \frac{2 \cdot \ddot{\alpha}^T \cdot \frac{\mathrm{d}^3\alpha}{\mathrm{d}s^3}}{\|\ddot{\alpha}\|_2^4} \\
&= 0
\end{aligned}$$

(ii) Unter Beachtung der Tatsache, dass für die Kurve $\beta$ ebenfalls

$$(\beta')^T \cdot \beta'' = 0$$

gilt, kommt man hier ebenfalls schnell zum gewünschten Ergebnis.

$$(\beta')^T \cdot h' = (\beta')^T \cdot \left(\beta' - \beta' + (R - \sigma) \cdot \beta''\right) = 0$$

(iii) Durch die Wahl von $R$ haben wir bereits $\alpha(0) = \tilde{\alpha}(0)$.

Im Punkt $\alpha(s)$ steht $\dot{\alpha}(s)$ senkrecht zur Tangente $\beta'(\sigma) \parallel \dot{\eta}(s)$. Wenn wir also die Schar der Tangentengeraden an $\beta$ betrachten, schneidet $\alpha$ die Schar stets in Normalenrichtung mit Einheits-Tangentenvektor $\|\dot{\alpha}\|_2 = 1$. Also erfüllt $\alpha(s)$ die Differentialgleichung

$$\dot{\alpha}(s) = \underline{n}(\alpha(s))$$

wobei $\underline{n}(\underline{x})$ den Normalenvektor zur Geraden durch $\underline{x}$ beschreibt.

Die Evolvente $\tilde{\alpha}(s)$ der Evolute $h(\sigma)$ zu $\beta(\sigma)$, reparametrisiert nach der Bogenlänge von $\tilde{\alpha}$, löst dieselbe Differentialgleichung

$$\dot{\tilde{\alpha}}(s) = \underline{n}\left(\tilde{\alpha}(s)\right)$$

denn es ist $\dot{\tilde{\alpha}}(s) \parallel h'(\sigma) \perp \beta'(\sigma)$.

Da wie bereits erwähnt $\alpha(0) = \tilde{\alpha}(0)$ gilt, folgt nun

$$\alpha \equiv \tilde{\alpha}$$

wegen des nächsten Lemmas.

□

**Lemma 7.4.18.** *Seien $\alpha(t), \tilde{\alpha}(t) \subseteq \mathbb{R}^N$ zwei Lösungen der selben Differentialgleichung*

$$\alpha'(t) = f(\alpha(t)) \qquad \tilde{\alpha}'(t) = f\left(\tilde{\alpha}(t)\right)$$

*zu gegebenem $\mathcal{C}^1$-Vektorfeld, $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ mit $x \mapsto f(x)$. Sei weiterhin $\alpha(0) = \tilde{\alpha}(0)$. Dann gilt für alle $t$, dass*

$$\alpha(t) = \tilde{\alpha}(t)$$

**Beweis:** Setze

$$w(t) := \tilde{\alpha}(t) - \alpha(t) \qquad \text{mit} \quad w(0) = 0$$

Dann erfüllt $w(t)$ eine $t$-abhängige lineare Differentialgleichung

$$w'(t) = A(t) \cdot w(t)$$

mit

$$A(t) := \int_0^1 \mathcal{D}f(\alpha(t) + \vartheta \cdot (\tilde{\alpha}(t) - \alpha(t)))\, \mathrm{d}\vartheta$$

Denn:

$$\begin{aligned} w'(t) &= \tilde{\alpha}'(t) - \alpha'(t) \\ &= f(\tilde{\alpha}(t)) - f(\alpha(t)) \\ &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\, f(\alpha(t) + \vartheta \cdot (\tilde{\alpha}(t) - \alpha(t)))\, \mathrm{d}\vartheta \\ &= A(t) \cdot w(t) \end{aligned}$$

Auf beschränkten Intervallen von $t$ gilt

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{1}{2}\cdot\|w(t)\|_2^2 &= w(t)^T\cdot w'(t)\\ &= w(t)^T\cdot A(t)\cdot w(t)\\ &\leq \frac{1}{2}\cdot C\cdot\|w(t)\|_2^2\end{aligned}$$

Dann gilt für $N(t) := \frac{1}{2}\cdot\|w(t)\|_2^2$, dass

$$N'(t)\leq C\cdot N(t)$$

Die Funktion $e^{-Ct}\cdot N(t)$ fällt also monoton.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\left(e^{-Ct}\cdot N(t)\right) = -C\cdot e^{-Ct}\cdot N(t) + e^{-Ct}\cdot N'(t)\leq 0$$

Da sie außerdem positiv ist, gilt dann

$$0\leq e^{-Ct}\cdot N(t)\leq N(0) = 0$$

Es ist nun also

$$\frac{1}{2}\cdot\|w(t)\|_2^2 = N(t)\equiv 0$$

für alle $t$ und damit $\alpha\equiv\tilde{\alpha}$. □

**Beispiel.** Ellipse

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} a\cdot\cos(t)\\ b\cdot\sin(t)\end{pmatrix}$$

$\alpha$ ist hier *nicht* über die Bogenlänge parametrisiert!
Wir berechnen nun die Evolute. Dabei ist $J = \begin{pmatrix} 0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

$$\eta_\alpha(t) = \alpha(t) + J\cdot\frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|_2}\cdot\frac{1}{\kappa_\alpha(t)}$$

Zunächst bestimmen wir die Ableitungen. Es ist

$$\alpha'(t) = \begin{pmatrix} -a\cdot\sin(t)\\ b\cdot\cos(t)\end{pmatrix}$$

und

$$\alpha''(t) = -\alpha(t)$$

Dann können wir mit der Formel für $\kappa_\alpha$ weiterrechnen.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\kappa_\alpha} &= \frac{\|\alpha'\|_2^3}{|\det(\alpha', \alpha'')|} \\
&= \frac{\|\alpha'\|_2^3}{|\det(\alpha', \alpha)|} \\
&= \frac{\|\alpha'\|_2^3}{\left|-ab \cdot \sin^2(t) - ab \cdot \cos^2(t)\right|} \\
&= \frac{\|\alpha'\|_2^3}{ab}
\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}
\eta_\alpha(t) &= \begin{pmatrix} a \cdot \cos(t) \\ b \cdot \sin(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b \cdot \cos(t) \\ a \cdot \sin(t) \end{pmatrix} \cdot \frac{a^2 \cdot \sin^2(t) + b^2 \cdot \cos^2(t)}{ab} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(t) \cdot \left(a - \frac{1}{a} \cdot (a^2 \cdot (1 - \cos^2(t)) + b^2 \cdot \cos^2(t))\right) \\ \sin(t) \cdot \left(b - \frac{1}{b} \cdot (b^2 \cdot (1 - \sin^2(t)) + a^2 \cdot \sin^2(t))\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\cos(t)}{a} \cdot \left(a^2 - a^2 \cdot (1 - \cos^2(t)) - b^2 \cdot \cos^2(t)\right) \\ \frac{\sin(t)}{b} \cdot \left(b^2 - b^2 \cdot (1 - \sin^2(t)) - a^2 \cdot \sin^2(t)\right) \end{pmatrix} \\
&= (a^2 - b^2) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\cos^3(t)}{a} \\ -\frac{\sin^3(t)}{b} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

## 7.5 Partielle Integration

Vorlesung 17.12.09

**Definition 7.5.1.** Wir nennen $K \subseteq \mathbb{R}^N$ kompakt ein ***(beschränktes)*** $\mathcal{C}^k$***-Gebiet*** mit ***äußerer Normale*** $\underline{n}(x)$, wenn gilt:

(i) $\delta\left(\mathring{K}\right) = \delta K$

(ii) $\delta K \subseteq \mathbb{R}^N$ ist eine eingebettete Untermannigfaltigkeit der Dimension $N-1$

(iii) $\underline{n}(x) \perp T_x(\delta K)$
$\exists \varepsilon(x) > 0 \ \forall 0 < \varepsilon < \varepsilon(x) \ : \ x + \varepsilon \cdot \underline{n}(x) \notin K$
$\|\underline{n}(x)\|_2 = 1$

### 7.5.1 Satz von Gauß

**Satz 7.5.2** (Gauß (1777-1855)). *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^N$ kompakt ($N \geq 2$) ein $\mathcal{C}^1$-Gebiet mit äußerer Normale $\underline{n}(x)$. Sei weiterhin $U$ eine offene Umgebung von $K$ und $f : U \to \mathbb{R}^N$ eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung. Dann gilt*

$$\int\limits_K \operatorname{div}(f) = \int\limits_{\delta K} f^T \cdot \underline{n} \, \mathrm{d}S$$

*Dabei ist die* **Divergenz** *von $f$ definiert als*

$$(\mathsf{div} f)(x) := \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} f_i(x) = \mathsf{Spur}(\mathcal{D}f(x))$$

**Beispiel.** $K \subseteq \mathbb{R}$, Intervall $K = [a, b]$.
linke Seite:

$$\int_K \mathsf{div}(f) = \int_a^b f'$$

rechte Seite:

$$\int_{\{a,b\}} f \cdot n = f(b) - f(a)$$

**Beweis:** Wir gehen in mehreren Schritten vor.
*1. Schritt:* lokalisieren, Zerlegung der 1
Sei $\tilde{V}_\mu$ eine beliebige offene Überdeckung von $K$. Dazu finden wir, ggf. nach Schrumpfung usw., eine endliche offene Überdeckung $V_k$ mit glatter 1-Zerlegung $\sum \alpha_k(x) \equiv 1$, für die $\mathsf{supp}(\alpha_k) \subset V_k$ gilt. Dann ist OE

$$\mathsf{supp}(f) \subseteq V = (-\varepsilon, \varepsilon)^N$$

Denn falls wir den Satz in diesem Fall bewiesen haben, folgt mit 1-Zerlegung, dass

$$\begin{aligned}
\int_K \mathsf{div}(f) &= \int_K \mathsf{div}\left(\sum_k \alpha_k f\right) \\
&= \sum_k \int_K \mathsf{div}\,(\alpha_k f) \\
&= \sum_k \int_{\delta K \cap V_k} \alpha_k f^T \underline{n}\ \mathrm{d}S \\
&= \int_{\delta K \cap \left(\bigcup_k V_k\right)} \left(\sum_k \alpha_k\right) f^T \underline{n}\ \mathrm{d}S
\end{aligned}$$

*2. Schritt:* $V \subseteq \mathring{K}$, also r. S. $= 0$ wegen $\mathsf{supp}(f) \subseteq V$, ist OK.

Denn

$$\begin{aligned}
\int\limits_K \mathsf{div}(f) &= \int\limits_K f_{i,x_i} \\
&= \int\limits_V f_{i,x_i} \\
&= \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \cdots \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \underbrace{\left( \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_{i,x_i} \, \mathrm{d}x_i \right)}_{=0} \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_{i-1} \mathrm{d}x_{i+1} \ldots \mathrm{d}x_N \\
&= 0 \\
&= \text{r. S.}
\end{aligned}$$

*3. Schritt:* Koordinaten in $V$, falls $\delta K \cap V \neq \varnothing$.
Wähle Koordinaten $\xi = (x_1, \ldots, x_{N-1})$ und $x_N$, also $x = (\xi, x_N)$, so dass $\delta K \cap V = \mathsf{graph} h$, mit $h : (-\varepsilon, \varepsilon)^{N-1} \to (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\mathcal{C}^1$ und $x_N = h(\xi)$. Außerdem soll

$$K \cap V = \{-\varepsilon < x_N < h(\xi)\}$$

sein.
Notfalls müssen die Koordinaten umnummeriert werden. Der Normalenvektor ist nun

$$\underline{n}(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \|h_\xi\|_2^2}} \cdot \begin{pmatrix} -h_\xi \\ 1 \end{pmatrix}$$

Denn es ist $F(\xi, x_N) := x_N - h(\xi) \equiv 0$ auf $\delta K \cap V$, folglich ist $\delta K \cap V$ Niveaufläche $\{x \in V \mid F = 0\}$. Aus dem impliziten Funktionensatz folgt

$$\underline{n}(x) \parallel \nabla F(\xi, x_N) = \begin{pmatrix} -h_\xi \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beide sind senkrecht zu $\mathsf{graph}(h)$. Wegen $\underline{n}(x) > 0$ zeigt die Normale nach außen.
*4. Schritt:* rechte Seite
$\delta K \cap V = \mathsf{graph}(h)$ besitzt eine Karte

$$\varphi(\xi) := (\xi, h(\xi))^T$$

Der metrische Tensor dazu ist

$$
\begin{aligned}
(g_{ij})_{i,j} &= \varphi'^T \cdot \varphi' \\
&= (\mathsf{id}_{N-1}, h_\xi^T) \cdot \begin{pmatrix} \mathsf{id}_{N-1} \\ h_\xi \end{pmatrix} \\
&= \mathsf{id}_{N-1} + h_\xi^T \cdot h_\xi \\
&= \begin{pmatrix} 1 & & & h_{\xi_1} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & \vdots \\ & & & h_{\xi_{N-1}} \end{pmatrix} \\
g = \det g_{ij} &= 1 + \|h_\xi\|_2^2
\end{aligned}
$$

Nun ist

$$
\begin{aligned}
\text{r. S.} &= \int\limits_{\mathsf{graph}(h)} f^T \underline{n} \; \mathrm{d}S \\
&= \int\limits_{(-\varepsilon,\varepsilon)^{N-1}} \!\!\cdots\! \int f^T \cdot \begin{pmatrix} -h_\xi \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{\sqrt{g}}{1 + \|h_\xi\|_2^2} \; \mathrm{d}\xi
\end{aligned}
$$

*5. Schritt:* linke Seite. $1 \leq i \leq N-1$

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{K \cap V} f_{i,x_i} \; \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_N \\
&= \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \cdots \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int\limits_{-\varepsilon}^{h(\xi)} f_{i,\xi_i} \; \mathrm{d}x_N \mathrm{d}\xi_1 \ldots \mathrm{d}\xi_{N-1} \\
&= \int\limits_{(-\varepsilon,\varepsilon)^{N-1}} \left( \underbrace{\left( \partial_{\xi_i} \int\limits_{-\varepsilon}^{h(\xi)} f_i(\xi, x_N) \; \mathrm{d}x_N \right)}_{=0} - f_i(\xi, h(\xi)) h_{\xi_i} \right) \mathrm{d}\xi_1 \ldots \mathrm{d}\xi_{N-1}
\end{aligned}
$$

*6. Schritt:* $(\text{l. S.})_N = \int\limits_{(-\varepsilon,\varepsilon)^{N-1}} f_N \; \mathrm{d}\xi$

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{K\cap V} f_{N,x_N}\,\mathrm{d}x_N \mathrm{d}\xi &= \int\limits_{(-\varepsilon,\varepsilon)^{N-1}} \int\limits_{-\varepsilon}^{h(\xi)} f_{N,x_N} f(\xi, x_N)\,\mathrm{d}x_N \mathrm{d}\xi \\
&= \int\limits_{(-\varepsilon,\varepsilon)^{N-1}} f_N(\xi, h(\xi))\,\mathrm{d}\xi \\
&= (\text{r. S.})_N
\end{aligned}
$$

□

Vorlesung 07.01.10 **Bemerkung.**

1. Verallgemeinerung: Es reicht, wenn $\delta K$, Lipschitz, aus endlich vielen $\mathcal{C}^k$-Stücken besteht.

2. Wichtige Anwendungen

   Betrachte die stationäre Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit mit Geschwindigkeit $v(x) \in \mathbb{R}^3$ für $x \in \mathbb{R}^3$, und Quellstärke $q(x)$. Dann gilt in einem beliebigen $\mathcal{C}^1$-Gebiet $K$, dass

$$
\begin{aligned}
\text{Abflussrate über } \delta K &= \int\limits_{\delta K} v \cdot \underline{n} \\
&= \int\limits_K \underbrace{\operatorname{div} v}_{=:q(x)} \\
&= \int\limits_K q(x) \\
&= \text{Zufluss innerhalb des Gebiets } K
\end{aligned}
$$

   Also ist
$$\operatorname{div} v(x) = q(x)$$

   Weitere Beispiele:

   a) elektrisches Feld $E(x)$
$$\operatorname{div} E(x) = q(x)$$
   Hierbei ist $q(x)$ die Ladungsdichte.

   b) magnetisches Feld $B(x)$
$$\operatorname{div} B(x) = 0$$

   c) Gravitation $F(x)$
$$\operatorname{div} F(x) = G^* \cdot \rho(x)$$
   $G^*$ ist eine Konstante und $\rho(x)$ die Massendichte (nicht negativ).

**Beispiel.** Sei $f(x) := x \in \mathbb{R}^N$ und $K = B_R^N(0)$ die Kugel im $\mathbb{R}^N$ mit Radius $R$. Dann ist $\delta K = S_R^{N-1}(0)$ die $(N-1)$-dimensionale Sphäre und weiterhin $\underline{n}(x) = \frac{x}{\|x\|_2}$ sowie $\operatorname{div} f = N$.

$$\begin{aligned}
R \cdot \mathrm{vol}_{N-1}\left(S_R^{N-1}(0)\right) &= R \cdot \int\limits_{\delta K} 1 \\
&= \int\limits_{\delta K} \underbrace{f^T}_{x} \cdot \underbrace{n}_{\frac{x}{\|x\|_2}} \\
&= \int\limits_{K} \operatorname{div} f \\
&= N \cdot \int\limits_{K} 1 \\
&= N \cdot \mathrm{vol}_N\left(B_R^N(0)\right) \\
&= N \cdot R^N \cdot \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right)}
\end{aligned}$$

Also folgt für das Volumen

$$\mathrm{vol}_{N-1}\left(S_R^{N-1}(0)\right) = N \cdot R^{N-1} \cdot \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\ \mathrm{vol}_N\left(B_R^N(0)\right)$$

### 7.5.2 Satz von Stokes

Zunächst befassen wir uns mit dem Vektorprodukt von $a, b \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
(a \times b)_i &= a_{i+1} \cdot b_{i-1} - a_{i-1} \cdot b_{i+1} \\
a \times b &= \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \text{„}\det \begin{pmatrix} e_1 & a_1 & b_1 \\ e_2 & a_2 & b_2 \\ e_3 & a_3 & b_3 \end{pmatrix}\text{“} \\
(a \times b)_i &= \sum_{j,k} \varepsilon_{i_{j,k}} a_j b_k \qquad \varepsilon_{i_{j,k}} \in \{0, \pm 1\} \\
\nabla &= \begin{pmatrix} \partial x_1 \\ \partial x_2 \\ \partial x_3 \end{pmatrix} \\
f &= \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \\
\operatorname{div} f &= \nabla f
\end{aligned}$$

Die Rotation von $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ ist definiert als

$$\operatorname{rot} f = \nabla \times f := \begin{pmatrix} \partial_2 f_3 - \partial_3 f_2 \\ \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3 \\ \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 \end{pmatrix} = \text{„}\det \begin{pmatrix} e_1 & \partial_1 & f_1 \\ e_2 & \partial_2 & f_2 \\ e_3 & \partial_3 & f_3 \end{pmatrix}\text{“}$$

Im $\mathbb{R}^2$ mit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ ist

$$\operatorname{rot} f := \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1$$

Dies erhält man, indem man sich $f_3 \equiv 0$ und $x_3$-unabhängig denkt.

$$\tilde{f}(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} f_1(x_1,x_2) \\ f_2(x_1,x_2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rot} \tilde{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 \end{pmatrix}$$

**Satz 7.5.3** (*Stokes*)**.** *Sei $f \in \mathcal{C}^1\left(U,\mathbb{R}^2\right)$, wobei $U$ eine offene Umgebung des kompakten $\mathcal{C}^1$-Gebietes $K \subseteq \mathbb{R}^2$ ist. Dann gilt*

$$\int_K \operatorname{rot} f = \int_{\delta K} f^T \cdot \underline{t}$$

*Dabei ist*

$$\underline{t}(x) := J \cdot \underline{n}(x) \qquad \textit{mit} \qquad J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Beweis:** Hierbei handelt es sich um eine Variante des Satzes von Gauß.

$$\begin{aligned} \int_K \operatorname{rot} f &= -\int_K \operatorname{div}(Jf) \\ &= -\int_{\delta K} (Jf)^T \cdot \underline{n} \\ &= -\int_{\delta K} (J^2 f)^T \cdot \underbrace{(J\underline{n})}_{\underline{t}} \\ &= \int_{\delta K} f^T \cdot \underline{t} \end{aligned}$$

□

Ausflug in die Funktionentheorie (komplexe Analysis)
Zur Erinnerung: $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$ mit $z = x_1 + i\cdot x_2$ und $f(z) = f_1(x_1,x_2) + i\cdot f_2(x_1,x_2)$ ist komplex differenzierbar, wenn

$$f'(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$$

**Satz 7.5.4** (Integralsatz von Cauchy). *Sei $f \in \mathcal{C}^1$ komplex differenzierbar und $K \subseteq \mathbb{R}^2$ ein kompaktes $\mathcal{C}^1$-Gebiet. Dann gilt*

$$\int\limits_{\delta K} f \cdot \mathrm{d}s = 0$$

*Dabei ist die komplexe Multiplikation gemeint. Mit $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$ ergibt sich reell*

$$\mathrm{d}s = \begin{pmatrix} s_1'(\tau) \\ s_2'(\tau) \end{pmatrix} \mathrm{d}\tau = (s_1'(\tau) + i \cdot s_2'(\tau)) \, \mathrm{d}\tau$$

**Beweis:**

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\delta K} f \cdot \mathrm{d}s &= \left( \int\limits_{\delta K} f_1 \cdot \mathrm{d}s_1 - f_2 \cdot \mathrm{d}s_2 \right) + i \cdot \left( \int\limits_{\delta K} f_1 \cdot \mathrm{d}s_2 + f_2 \cdot \mathrm{d}s_1 \right) \\
&= \left( \int\limits_{\delta K} \overline{f} \cdot \underline{t} \right) + i \cdot \left( \int\limits_{\delta K} \overline{f} \cdot \underline{n} \right) \\
&= \int\limits_K \operatorname{rot} \overline{f} + i \cdot \int\limits_K \operatorname{div} \overline{f} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Dies folgt wegen komplexer Differenzierbarkeit aus

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \overline{f} &= \partial_1 f_1 - \partial_2 f_2 = 0 \\
\operatorname{rot} \overline{f} &= -\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 = 0
\end{aligned}$$

□

Der Satz von Stokes lässt sich auf den $\mathbb{R}^3$ erweitern. Vorlesung 12.01.10

**Satz 7.5.5.** *Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine eingebettete, kompakte und orientierte $\mathcal{C}^2$-Untermannigfaltigkeit der Dimension 2 (also eine Fläche) mit Rand $\delta S$ sowie dazugehöriger Normale $\underline{\nu}$ und Tangente $\underline{\vartheta}$ (beide mit Norm 1). Dann gilt für $f \in \mathcal{C}^1$, dass*

$$\int\limits_S (\operatorname{rot} f) \cdot \underline{\nu} = \int\limits_{\delta S} f \cdot \underline{\vartheta}$$

**Definition 7.5.6.** Sei $S \subseteq M$ kompakt, wobei $M$ eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist. Außerdem existiere eine Umgebung $U$ von $S$ in $M$ sowie ein Atlas $\varphi_a : D \to V_a$ mit $D = \{\|y\|_2 \leq 1, y \in \mathbb{R}^2\}$. Weiterhin sei

$$V_a \subset S \qquad \text{oder} \qquad V_a \cap S = \varphi_a(D \cap \{y_1 \geq 0\}) \text{ (falls nichtleer)}$$

und für die Kartenwechsel $\tau := \varphi_{\tilde{a}}^{-1} \circ \varphi_a$ gelte

$$\det(\tau') > 0$$

Dann nennen wir $S$ eine ***orientierte $\mathcal{C}^2$-Fläche*** mit Rand $\delta S$.

Die Richtung der Normalen $\underline{\nu}$ ist allerdings noch nicht eindeutig. Sie wird so gewählt, dass

$$\det\left( \ \partial_{y_1}\varphi_a \ \middle| \ \partial_{y_2}\varphi_a \ \middle| \ \underline{\nu} \ \right) > 0$$

**Beweis:** *1. Schritt:* Endliche Zerlegung der 1 zu Atlas $V_a, \varphi_a$
Es ist

$$\sum a_j \equiv 1, \qquad 0 \le \alpha_j \le 1, \qquad \alpha_j \in \mathcal{C}_c^\infty(V_a), \qquad f = \sum a_j f$$

Zeige

$$\sum_j \int_S \operatorname{rot}(\alpha_j f) \cdot \underline{\nu} = \sum_j \int_{\delta S} (\alpha_j f) \cdot \underline{\vartheta}$$

Ohne Einschränkung kommen wir also mit einer einzigen Karte $\varphi_a, V_a$ aus und lassen ab jetzt die Indizes $j$ mitsamt $\alpha_j$ weg.
*2. Schritt:* Sei $F \in \mathcal{C}^0(S, \mathbb{R}^3)$, $\varphi : K \to S$ eine Karte und $K$ ein berandetes Gebiet in $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Dann gilt (mit $i \bmod 3$)

$$\int_S F \cdot \underline{\nu} = \sum_{i=1}^{3} \int_K (F_i \circ \varphi) \cdot \frac{\partial(\varphi_{i+1}, \varphi_{i-1})}{\partial(y_1, y_2)}$$

weil

$$\frac{\partial(\varphi_{i+1}, \varphi_{i-1})}{\partial(y_1, y_2)} = \det \begin{pmatrix} \partial_{y_1}\varphi_{i+1} & \partial_{y_2}\varphi_{i+1} \\ \partial_{y_1}\varphi_{i-1} & \partial_{y_2}\varphi_{i-1} \end{pmatrix}$$

Betrachte nun nur noch $i = 3$. Ohne Einschränkung können wir $\nu_3 \neq 0$ annehmen. Dann können wir mit dem impliziten Funktionensatz lokal $x_3 = h(x_1, x_2)$ schreiben. Es ist dann

$$\underline{\nu} = \begin{pmatrix} -\partial_{x_1} h \\ -\partial_{x_2} h \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \|h'\|_2^2}}$$

und $P_{12} : S \to (x_1, x_2)$-Ebene eine Projektion. Aus dem Beweis des Satzes von Gauß wissen wir

$$\begin{aligned} \int_S F_3 \nu_3 &= \int_{P_{12}(S)} F_3(x_1, x_2, h(x_1, x_2)) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \|h'\|_2^2}} \cdot \underbrace{\sqrt{1 + \|h'\|_2^2}}_{\sqrt{g}} \, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \\ &= \int_K (F_3 \circ \varphi) \cdot \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(y_1, y_2)} \, \mathrm{d}y_1 \mathrm{d}y_2 \end{aligned}$$

Für die anderen $i = 1, 2$ vertausche man die Indizes zyklisch. Anschließendes Summieren über $i$ führt zum Ziel.

*3. Schritt:* rechte Seite

$$\int_{\delta S} f \cdot \underline{\vartheta} = \int_{\delta K} (f \circ \varphi) \cdot \frac{\varphi' \cdot \underline{t}}{\|\varphi' \cdot \underline{t}\|_2} \cdot \|\varphi' \cdot \underline{t}\|_2$$

Wir vereinbaren nun folgende Kurzschreibweisen:

$$\varphi_{i,j} := \frac{\partial}{\partial y_j} \varphi_i \qquad f_{i,k} := \frac{\partial}{\partial x_k} f_i$$

*4.Schritt:* Stokes in $\mathbb{R}^2$ auf rechte Seite anwenden

$$\int_{\delta S} f \cdot \underline{\vartheta} = \sum_{i=1}^{3} \int_{\delta S} f_i \cdot \underline{\vartheta}_i = \sum_{i=1}^{3} \int_{\delta K} (f_i \circ \varphi) \cdot \varphi_i' \cdot \underline{t}$$

Für $i = 3$ lautet der Summand der rechten Seite

$$\begin{aligned}
\int_{\delta K} (f_3 \circ \varphi) \cdot \begin{pmatrix} \partial_{y_1}\varphi_3 \\ \partial_{y_2}\varphi_3 \end{pmatrix}^T \cdot \underline{t} &= \int_K \operatorname{rot}_y \left( (f_3 \circ \varphi) \cdot \begin{pmatrix} \partial_{y_1}\varphi_3 \\ \partial_{y_2}\varphi_3 \end{pmatrix} \right) \\
&= \int_K \partial_{y_1} \left( (f_3 \circ \varphi) \cdot \partial_{y_2}\varphi_3 \right) - \partial_{y_2} \left( (f_3 \circ \varphi) \cdot \partial_{y_1}\varphi_3 \right) \\
&= \int_K (f_{3,1}\varphi_{1,1} + f_{3,2}\varphi_{2,1} + \cancel{f_{3,3}\varphi_{3,1}}) \cdot \varphi_{3,2} \\
&\quad - \int_K (f_{3,1}\varphi_{1,2} + f_{3,2}\varphi_{2,2} + \cancel{f_{3,3}\varphi_{3,2}}) \cdot \varphi_{3,1} \\
&\quad + \cancel{\int_K (f_3 \circ \varphi) \cdot \partial_{y_1}\partial_{y_2}\varphi_3 - (f_3 \circ \varphi) \cdot \partial_{y_2}\partial_{y_1}\varphi_3} \\
&= \int_K -f_{3,1} \cdot \frac{\partial(\varphi_3, \varphi_1)}{\partial(y_1, y_2)} + f_{3,2} \cdot \frac{\partial(\varphi_2, \varphi_3)}{\partial(y_1, y_2)}
\end{aligned}$$

Nun betrachten wir die linke Seite. Mit $F = \operatorname{rot} f$ wenden wir die Ergebnisse aus dem 2. Schritt an.

$$\int_S (\operatorname{rot} f) \cdot \underline{\nu} = \sum_{i=1}^{3} \int_K (\operatorname{rot} f)_i \cdot \frac{\partial(\varphi_{i+1}, \varphi_{i-1})}{\partial(y_1, y_2)}$$

Der Summand für $i = 3$ lautet dann mit Kurschreibweise

$$\int_K (f_{2,1} - f_{1,2}) \cdot \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(y_1, y_2)}$$

Beschränken wir uns nun nur auf die wesentlichen Indizes, sieht die Situation folgendermaßen aus:

| $i$ | $f$ | $-f$ | $\partial\varphi$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $3,2$ | $2,3$ | $(2,3)$ |
| 2 | $1,3$ | $3,1$ | $(3,1)$ |
| 3 | $2,1$ | $1,2$ | $(1,2)$ |

Suchen wir nun jene Einträge mit $f_3$ zusammen und „entschlüsseln“ sie wieder, so erhalten wir

$$\int\limits_K f_{3,2} \cdot \frac{\partial(\varphi_2, \varphi_3)}{\partial(y_1, y_2)} - f_{3,1} \cdot \frac{\partial(\varphi_3, \varphi_1)}{\partial(y_1, y_2)}$$

Durch zyklisches Vertauschen der Indizes erhalten wir letztendlich alle Terme und es gilt die gewünschte Gleichheit. $\square$

Vorlesung 14.01.10

**Beispiel** (Integralsatz von Cauchy)**.** Laut diesem Satz galt ja, dass

$$\int\limits_\gamma f(z) \cdot \mathrm{d}z = 0$$

sofern $f(z)$ komplex differenzierbar und $\gamma$ eine geschlossene Kurve in $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ ist. Daraus lässt sich folgern, dass

$$A := \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1} \cos t \, \mathrm{d}t = \cos\left(\alpha \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \Gamma(\alpha)$$

$$B := \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1} \sin t \, \mathrm{d}t = \sin\left(\alpha \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \Gamma(\alpha)$$

falls $0 < \alpha < 1$ und

$$\Gamma(\alpha) := \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1} \cdot e^{-t} \, \mathrm{d}t$$

Um dies zu zeigen, wird zunächst das Integral zerlegt.

$$0 = \int\limits_\gamma t^{\alpha-1} \cdot e^{-t} \cdot \mathrm{d}t = \int\limits_{\gamma_1} t^{\alpha-1} \cdot e^{-t} \, \mathrm{d}t + \int\limits_{\gamma_2} t^{\alpha-1} \cdot e^{-t} \cdot \mathrm{d}t + \int\limits_{\gamma_3} t^{\alpha-1} \cdot e^{-t} \cdot \mathrm{d}t$$

Falls wir zeigen, dass

$$\int\limits_{\gamma_2} t^{\alpha-1} \cdot e^{-t} \cdot \mathrm{d}t \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

gilt

$$
\begin{aligned}
\Gamma(\alpha) \underset{R\to\infty}{\longleftarrow} \int\limits_{\gamma_1} t^{\alpha-1}\cdot e^{-t}\,\mathrm{d}t + \underbrace{o(1)}_{\gamma_2} &= -\int\limits_{\gamma_3} t^{\alpha-1}\cdot e^{-t}\cdot \mathrm{d}t \\
&= -\int\limits_R^0 (i\cdot\tau)^{\alpha-1}\cdot e^{-i\cdot\tau}\cdot i\,\mathrm{d}\tau \\
&= \underbrace{\int\limits_0^R \tau^{\alpha-1}\cdot(\cos\tau - i\cdot\sin\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{\underset{R\to\infty}{\longrightarrow} A-i\cdot B}\cdot \underbrace{i^\alpha}_{e^{i\cdot\alpha\cdot\frac{\pi}{2}}}
\end{aligned}
$$

Also folgt

$$
A - i\cdot B = \Gamma(\alpha)\cdot e^{-i\cdot\alpha\cdot\frac{\pi}{2}} = \Gamma(\alpha)\cdot\left(\cos\left(\alpha\cdot\frac{\pi}{2}\right) - i\cdot\sin\left(\alpha\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)
$$

Nun zeigen wir noch, dass die Voraussetzung auch stimmt. Wir substituieren hierbei $t = R\cdot e^{i\varphi}$ und deshalb $\mathrm{d}t = R\cdot e^{i\varphi}\cdot i\,\mathrm{d}\varphi$.

$$
\begin{aligned}
\left|\int\limits_{\gamma_2} t^{\alpha-1}\cdot e^{-t}\cdot\mathrm{d}t\right| &\le \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left|R^{\alpha-1}\cdot e^{i\varphi(\alpha-1)}\cdot e^{-R\cdot e^{i\varphi}}\cdot R\cdot e^{i\varphi}\cdot i\right|\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} R^\alpha\cdot e^{-R\cdot\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} R^\alpha\cdot e^{-R\cdot\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi + \int\limits_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} R^\alpha\cdot e^{-R\cdot\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \\
&\le \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} R^\alpha\cdot e^{-R\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)}\,\mathrm{d}\varphi + \int\limits_0^{\varepsilon} R^\alpha\cdot e^{-R\cdot\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\,\mathrm{d}\varphi \\
&\le \frac{\pi}{2}\cdot R^\alpha\cdot e^{-R\cdot\sin(\varepsilon)} + \varepsilon\cdot R^\alpha \\
&\le \frac{\pi}{2}\cdot R^\alpha\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot R\cdot\varepsilon} + \varepsilon\cdot R^\alpha \\
&= \frac{\pi}{2}\cdot R^\alpha\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}\cdot R\cdot R^{-\frac{1}{2}\cdot(\alpha+1)}\right) + R^\alpha\cdot R^{-\frac{1}{2}\cdot(\alpha+1)} \qquad (*) \\
&= \frac{\pi}{2}\cdot\underbrace{\underbrace{R^\alpha}_{\longrightarrow\infty}\cdot\underbrace{\exp\left(-\frac{1}{2}\cdot\underbrace{R^{\frac{1}{2}\cdot(1-\alpha)}}_{\longrightarrow\infty}\right)}_{\longrightarrow 0}}_{\longrightarrow 0} + \underbrace{R^{-\frac{1}{2}\cdot(1-\alpha)}}_{\longrightarrow 0}
\end{aligned}
$$

Bei $(*)$ verwende $\varepsilon := R^{-\frac{1}{2}\cdot(\alpha+1)}$.

**Bemerkung** (Maxwell-Gleichungen, 1871). *John C. Maxwell*(1831-1879)

$$\begin{array}{ll}
\operatorname{div} D = \rho & \text{Gauß} \\
\operatorname{div} B = 0 & \text{Gauß} \\
\operatorname{rot} E = -\partial_t B & \text{Faraday} \\
(\operatorname{rot} H = J & \text{Ampère}) \\
\operatorname{rot} H = J + \partial_t D & \text{Maxwell}
\end{array}$$

$$D = \varepsilon \cdot E$$
$$B = \mu \cdot H$$

Dabei gelten folgende Bezeichnungen:

| | |
|---|---|
| $\varepsilon$ | dielektrische Konstante |
| $\mu$ | magnetische Permeabilität |
| $J$ | elektrischer Strom |
| $E$ | elektisches Feld |
| $B$ | Magnetisches Feld |

Anwendungen:

(i) Mikrofon

$$-\partial_t \int_S B \cdot \underline{\nu} = \int_S \operatorname{rot} E \cdot \underline{\nu} = \int_{\delta S} E \cdot \underline{\nu} = U$$

(ii) Lautsprecher, Elektromotor

$$\int_{\delta S} H \cdot \underline{\nu} = \int_S \operatorname{rot} H \cdot \underline{\nu} = \int_S J \cdot \underline{\nu} + \ldots = \text{Strom}$$

(iii) Transformatoren

Idealerweise tritt kein Verlust auf, dann wäre

$$U \cdot I = P = \tilde{U} \cdot \tilde{I}$$

Jedoch ist nach Ohm die Verlustspannung

$$\tilde{\tilde{U}} = \tilde{I} \cdot R$$

Durch unsere Gleichungen wissen wir

$$\frac{\tilde{U}}{\tilde{n}} = \int_{\delta S} \operatorname{rot} E = -\partial_t \int_S B = \frac{U}{n}$$

Also ist die Verlustleistung

$$\tilde{P} = \tilde{\tilde{U}} \cdot \tilde{I} = \left(\tilde{I}\right)^2 \cdot R = \left(\frac{P}{\tilde{U}}\right)^2 \cdot R = \left(\frac{P}{U}\right)^2 \cdot \left(\frac{n}{\tilde{n}}\right)^2 \cdot R$$

Da $P$ und $U$ vorgeschrieben sind und $R$ zu verkleinern mit hohen Kosten verbunden ist, erreicht man eine geringere Verlustleistung, falls $\tilde{n} \gg n$. Dann ist auch $\tilde{U} \gg U$.

(iv) Licht, Radio, Handy, Radar, Mikrowelle usw.

$$D = \sin(\omega t) \cdot D_0(x)$$
$$\partial_t D = \omega \cdot \cos(\omega t) \cdot D_0(x)$$

So kann über partielle Differentialgleichungen die Wellenausbreitung von elektromagnetischen Wellen $(E, B)$ bestimmt werden. Im Vakuum ist $\rho = 0$. Fast man Licht als elektromagnetische Welle auf, so erhält man auf diesem Weg die Lichtgeschwindigkeit mit circa 315000 $\frac{km}{s}$.

Vorlesung 19.01.10

*Ausblick:* Unsere Sätze von Gauß und Stokes sind sehr verallgemeinert worden für allgemeine orientierbare Mannigfaltigkeiten $S \subseteq \mathbb{R}^N$ mit Rand $\delta S$ und Dimension $1 \leq m \leq N$.
Gauß: $S = K$, $m = N$
Stokes: $m = 2$, $N = 3$
Kurven: $m = 1$
Es gilt (vgl. [Forster III], [Holmann & Rummler]) der allgemeine Stokes

$$\int\limits_S \mathrm{d}\omega = \int\limits_{\delta S} \omega$$

Dabei ist $\omega$ eine sogenannte ***äußere/alternierende Differentialform der Stufe*** $m-1$ und die ***äußere Ableitung*** $\mathrm{d}\omega$ eine alternierende Differentialform der Stufe $m$. Formen der Stufe $m$ sind die richtigen Objekte zur Integration auf $m$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, weil sie sich korrekt (gemäß Transformationssatz) transformieren. Die äußere Ableitung $\mathrm{d}\omega$ ist gerade so definiert, dass der Satz stimmt.

**Beispiel.** $\dim S = 2$ in $\mathbb{R}^3$ und $\omega := f_1\,\mathrm{d}x_1 + f_2\,\mathrm{d}x_2 + f_3\,\mathrm{d}x_3$.

$$\int\limits_{\delta S} f \cdot \underline{\vartheta} = \int\limits_{\delta S} \omega = \int\limits_{\delta S} (f_1 \underbrace{\mathrm{d}x_1}_{x_1'(s)\,\mathrm{d}s} + f_2 \underbrace{\mathrm{d}x_2}_{x_2'(s)\,\mathrm{d}s} + f_3 \underbrace{\mathrm{d}x_3}_{x_3'(s)\,\mathrm{d}s})$$

Dabei ist $s$ die Bogenlänge entlang der Kurve $\delta S$.

$$\mathrm{d}\omega = (\operatorname{rot} f)_1\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + (\operatorname{rot} f)_2\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + (\operatorname{rot} f)_3\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$$

# 8 Lebesgue-Integral

Das Lebesgue-Integral ist ein Versuch, recht viele Funktionen zu integrieren und recht einfach (Grenzwert-)Sätze zu erhalten. Bisher haben wir uns mit halbstetigen Funktionen befasst. Dazu einige Erinnerungen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^{\uparrow} &= \{\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \mid \exists \varphi_n \in \mathcal{C}_c \text{ mit } \varphi_n \nearrow \varphi\} \\
&= \{\varphi \mid \varphi \text{ ist uhs und } \varphi \geq 0 \text{ außerhalb eines Kompaktums}\} \\
\mathcal{H}^{\downarrow} &= \{\psi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \mid \exists \psi_n \in \mathcal{C}_c \text{ mit } \psi_n \searrow \psi\} \\
&= \{\psi \mid \psi \text{ ist ohs und } \psi \leq 0 \text{ außerhalb eines Kompaktums}\} \\
&= -\mathcal{H}^{\uparrow}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{H}\text{–}\int \varphi := \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \int \varphi_n$$

$$\int (-\varphi) = -\int \varphi \qquad (\varphi \in \mathcal{H})$$

$$\mathcal{H}^{\uparrow} = \mathcal{H}^{\uparrow\uparrow}$$

$$\mathcal{H}^{\uparrow} \ni \varphi_n \nearrow \varphi \Longrightarrow \int \varphi = \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \int \varphi$$

## 8.1 Definition und erste Eigenschaften

**Definition 8.1.1.** Es sei

$$\mathcal{F} = \big\{ f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \big\}$$

die Menge der numerischen Funktionen. Definiere dann für $f \in \mathcal{F}$ das ***Lebesgue-Oberintegral***

$$\int^* f := \inf \left\{ \int \varphi \,\middle|\, \varphi \geq f \text{ mit } \varphi \in \mathcal{H}^{\uparrow} \right\} \leq \infty$$

sowie das ***Lebesgue-Unterintegral***

$$\int_* f := \sup \left\{ \int \psi \,\middle|\, \psi \leq f \text{ mit } \psi \in \mathcal{H}^{\downarrow} \right\} \geq -\infty$$

Wir nennen $f$ ***Lebesgue-integrierbar*** ($f \in \mathcal{L}$), wenn

$$-\infty < \int_* f = \int^* f < \infty$$

Dann bezeichnet

$$\mathcal{L}\text{–}\int f := \int_* f = \int^* f$$

das ***Lebesgue-Integral***.

**Lemma 8.1.2.** *Seien $f, g, f_n \in \mathcal{F}$. Dann gilt*

*(i) Symmetrie*

$$\int_* f = -\int^* (-f)$$

*(ii) Vergleich*

$$\int_* f \leq \int^* f$$

*(iii) Monotonie*

$$f \leq g \Longrightarrow \int^* f \leq \int^* g \quad \wedge \quad \int_* f \leq \int_* g$$

*(iv) Konsistenz*

$$f \in \mathcal{H} \quad \wedge \quad \left|\int f\right| < \infty \Longrightarrow f \in \mathcal{L} \quad \wedge \quad \mathcal{L}\text{–}\int f = \mathcal{H}\text{–}\int f$$

*(v) Skalierung*

$$\lambda > 0 \quad \wedge \quad f \geq 0 \Longrightarrow \int \lambda f = \lambda \cdot \int f$$

*(vi) monotoner Limes*

$$f_n \geq 0 \Longrightarrow \int^* \left(\sum_n f_n\right) \leq \sum_n \left(\int^* f_n\right)$$

**Beweis:**

(i) Symmetrie

$$\begin{aligned}
\int_* f &= \sup\left\{ \int \psi \,\middle|\, \psi \leq f \text{ mit } \psi \in \mathcal{H}^{\downarrow} \right\} \\
&= \sup\left\{ \int (-\varphi) \,\middle|\, \varphi \geq (-f) \text{ mit } \varphi \in \mathcal{H}^{\uparrow} \right\} \qquad (\psi := -\varphi) \\
&= -\inf\left\{ \int \varphi \,\middle|\, \varphi \geq (-f) \text{ mit } \varphi \in \mathcal{H}^{\uparrow} \right\} \\
&= -\int^* (-f)
\end{aligned}$$

(ii) Vergleich. Betrachte

$$\mathcal{H}^\downarrow \ni \psi \le f \le \varphi \in \mathcal{H}^\uparrow$$
$$\Longrightarrow \int 0 \le \int \varphi + (-\psi) = \int \varphi + \int (-\psi) = \int \varphi - \int \psi$$
$$\Longrightarrow \int \psi \le \int \varphi$$
$$\Longrightarrow \int_* f = \sup_\psi \int \psi \le \inf_\varphi \int \varphi = \int^* f$$

(iii) Monotonie

$$f \le g \le \varphi \in \mathcal{H}^\uparrow \Longrightarrow f \le \varphi$$

Weil bei $g$ das Infinimum über eine kleinere Menge von $\varphi$ gebildet wird, ist also

$$\int^* g \ge \int^* f$$

(iv) Konsistenz. Betrachte den Fall $f \in \mathcal{H}^\downarrow$. Dann wähle in der Definition von $\int_* f$ einfach $\psi := f$ um zu sehen, dass

$$\int_* f = \int \psi = \mathcal{H}^\downarrow\text{–}\!\int f$$

Um $\int^* f$ zu bestimmen bedenke, dass $f \in \mathcal{H}^\downarrow$ monotoner Limes ist.

$$\mathcal{H}^\uparrow \supseteq \mathcal{C}_c \ni \underbrace{\psi_n}_{:=\varphi_n} \searrow f$$
$$\mathcal{H}\text{–}\!\int f = \lim_{\text{n}\to\infty} \int \underbrace{\psi_n}_{=\varphi_n}$$

Folglich

$$\int_* \le \int^* f = \inf\left\{ \int \varphi \,\middle|\, \varphi \ge f \text{ mit } \varphi \in \mathcal{H}^\uparrow \right\} \le \lim_{\text{n}\to\infty} \int \varphi_n = \mathcal{H}\text{–}\!\int f = \int_* f$$
$$\Longrightarrow \int_* f = \int^* f = \int f$$

Also ist das Integral endlich.

(v) Skalierung

$$\begin{aligned}\int^* \lambda f &= \inf\left\{ \int \varphi \,\middle|\, \varphi \ge \lambda f \text{ mit } \varphi \in \mathcal{H}^\uparrow \right\} \\ &= \inf\left\{ \int \lambda\varphi \,\middle|\, \lambda\varphi \ge \lambda f \text{ mit } \varphi \in \mathcal{H}^\uparrow \right\} \\ &= \inf\left\{ \int \lambda\varphi \,\middle|\, \varphi \ge f \text{ mit } \varphi \in \mathcal{H}^\uparrow \right\} \\ &= \lambda \cdot \int^* f\end{aligned}$$

(vi) monotoner Limes. Wähle, zu beliebigen $\varepsilon_n > 0$, $\mathcal{H}^\uparrow \ni \varphi_n \geq f_n$ mit

$$\int \varphi_n = \int^* f_n + \varepsilon_n$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}
\int^* \left(\sum_n f_n\right) &\leq \int \left(\sum_n \varphi_n\right) \\
&= \sum_n \left(\int \varphi_n\right) \\
&= \sum_n \left(\int^* f_n + \varepsilon_n\right) \\
&= \sum_n \left(\int^* f_n\right) + \underbrace{\sum_n \varepsilon_n}_{=:\varepsilon>0 \text{ bel.}}
\end{aligned}$$

$$\implies \int^* \left(\sum_n f_n\right) \leq \sum_n \left(\int^* f_n\right)$$

□

## 8.2 Stetige Approximation

Zu $f \in \mathcal{F}$ tun wir so, als hätten wir eine Norm.

$$\|f\|_{L^1} := \int^* |f|$$

Wir haben wegen des Lemmas

$$\begin{aligned}
\|\lambda f\| &= |\lambda| \cdot \|f\| \\
\|f + g\| &\leq \|f\| + \|g\|
\end{aligned}$$

Allerdings ist $\|f\| \leq \infty$, nimmt also eventuell $\infty$ an. Dies könnten wir noch beheben, indem wir uns auf $f \in \mathcal{L}$ einschränken. Jedoch bleibt das Problem, dass

$$\|f\| = 0 \quad \not\Longrightarrow \quad f = 0$$

Es könnte $f$ z. B. die Indikatorfunktion einer abgeschlossenen Nullmenge sein.
Für den Moment blenden wir dies jedoch aus und sehen sie als richtige Norm an.

**Satz 8.2.1.**

*(a) „dicht“*

$$f \in \mathcal{L} \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists g \in \mathcal{C}_c\ :\ \|f - g\|_{L^1} < \varepsilon$$

*(b) „stetig": Sei $f \in \mathcal{F}$ und $g_n \in \mathcal{C}_c$. Dann*

$$\|f-g\|_{L^1} \longrightarrow 0 \Longrightarrow f \in \mathcal{L} \quad \wedge \quad \int f = \lim_{n\to\infty} \int g_n$$

**Beweis:** Vorlesung 21.01.10

(a) „$\Rightarrow$": Sei $f \in \mathcal{L}$, $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle

$$\underbrace{\psi}_{\in\mathcal{H}^\downarrow} \le f \le \underbrace{\varphi}_{\in\mathcal{H}^\uparrow} \ge \underbrace{g}_{\in\mathcal{C}_c}$$

mit

$$\frac{\varepsilon}{4} + \int \psi \ge \int_* f = \int^* f \ge \int \varphi - \frac{\varepsilon}{4}$$
$$\int g > \int \varphi - \frac{\varepsilon}{2}$$

Nun gilt

$$|f-g| \le \begin{cases} \varphi - f \le \varphi - \psi & \text{falls } g \ge f \\ \varphi - g & \text{falls } g \le f \end{cases}$$
$$\le (\varphi - \psi) + (\varphi - g)$$

Für das Integral gilt dann

$$\int^* |f-g| \le \underbrace{\int \varphi - \int \psi}_{\le \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\int \varphi - \int g}_{\le \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

„$\Leftarrow$": Nach Voraussetzung ist

$$\int^* |f-g| < \varepsilon$$

Also existiert $h \in \mathcal{H}^\uparrow$ mit

$$h \ge |f-g| \quad \text{und} \quad \int h < \varepsilon$$

Deshalb gilt

$$\psi := \underbrace{g-h}_{\in\mathcal{H}^\downarrow} \le f \le \underbrace{g+h}_{\in\mathcal{H}^\uparrow} =: \varphi$$

und nun

$$\forall \varepsilon\, \exists g \;:\; \int g - \varepsilon \le \int g - \int h = \int \psi \le \int_* f \le \int^* f \le \int g + \int h \le \int g + \varepsilon$$

Also ist

$$\int_* f = \int^* f$$

und endlich. Also ist $f \in \mathcal{L}$.

(b) Benutze den Beweis von (a) „$\Leftarrow$“ mit $g_n, h_n, \varepsilon_n \longrightarrow 0$. Wegen (a) ist ohnehin schon $f \in \mathcal{L}$. Dann

$$\int g_n - \varepsilon_n \leq \int f \leq \int g_n + \varepsilon_n$$

Also

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int g_n$$

□

Zerlege $f$ in einen positiven und einen negativen Teil:

$$f^{\pm} := \max(\pm f, 0) \qquad f^{\pm} \in \mathcal{F}^{\pm} := \{f \in \mathcal{F} \mid : \ f \geq 0\}$$

Also ist

$$f = f^+ - f^- \qquad |f| = f^+ + f^-$$

**Korollar 8.2.2.**

*(a)* $f \in \mathcal{L} \Longleftrightarrow f^+, f^- \in \mathcal{L}$

*(b)* $f \in \mathcal{L} \Longrightarrow |f| \in \mathcal{L}$

*(c)* $f_1, f_2 \in \mathcal{L} \Longrightarrow \max(f_1, f_2), \min(f_1, f_2) \in \mathcal{L}$

**Beweis:**

(a) Übung

(b) Übung

(c) Es ist $f_1 \approx g_1 \in \mathcal{C}_c$ (bis auf $\varepsilon_1$) und $f_2 \approx g_2 \in \mathcal{C}_c$ (bis auf $\varepsilon_2$).

$$\begin{aligned}\int^* |\max(f_1, f_2) - \max(g_1, g_2)| &\leq \int^* \max(|f_1 - g_1|, |f_2 - g_2|) \\ &\leq \int^* |f_1 - g_1| + \int^* |f_2 - g_2| \\ &\leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 =: \varepsilon\end{aligned}$$

□

**Korollar 8.2.3.** *Seien* $f_1, f_2 \in \mathfrak{L}_1 := \{f \in \mathcal{L} \mid \forall x \ : \ f(x) \neq \pm\infty\}, \lambda \in \mathbb{R}$.

*(a) Linearität:*

$$\int (\lambda f_1 + f_2) = \lambda \int f_1 + \int f_2$$

*(b) Monotonie*

$$f_1 \leq f_2 \Longrightarrow \int f_1 \leq \int f_2$$

**Beweis:**

(a)

$$f_k \approx g_k \in \mathcal{C}_c$$

(b)

$$\int f_k = \int^* f_k$$

Hierfür gilt Monotonie aber schon.

□

**Korollar 8.2.4.** *Seien $f_1, f_2 \in \mathfrak{L}_1$ und sei $f_2$ beschränkt, d. h.*

$$\exists M \in \mathbb{R}\, \forall x \,:\, |f_2(x)| \leq M$$

*Dann gilt*

$$f_1 \cdot f_2 \in \mathfrak{L}_1$$

**Beweis:** $f_k \approx g_k \in \mathcal{C}_c$

$$\begin{aligned}
\|f_1 f_2 - g_1 g_2\| &= \int^* |f_1 f_2 - g_1 g_2| \\
&\leq \int^* |f_1 f_2 - g_1 f_2| + \int^* |g_1 f_2 - g_1 g_2| \\
&\leq \int^* |f_1 - g_1| \cdot M + \sup_{\mathbb{R}^N} \underbrace{|g_1|}_{\in \mathcal{C}_c} \cdot \int^* |f_2 - g_2| \\
&\leq M \cdot \varepsilon_1 + \sup |g_1| \cdot \varepsilon_2 \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

Zu $\varepsilon, M$ wähle $\varepsilon_1, g_1$ mit

$$M \cdot \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$$

und zu $g_1$ wähle $\varepsilon_2, g_2$ mit

$$\sup |g_1| \cdot \varepsilon_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

□

**Korollar 8.2.5.** *Sei $f_1 \in \mathfrak{L}_1$, beschränkt und $p \geq 1$. Dann gilt*

$$|f|^p \in \mathfrak{L}_1$$

**Beweis:** Sei $P(\xi) := \xi^p$. Dann gilt für $0 \leq \xi_1, \xi_2 \leq M$, dass

$$|P(\xi_1) - P(\xi_2)| \leq pM^{p-1} |\xi_1 - \xi_2|$$

Wir wissen schon, dass $\mathfrak{L}_1 \ni |f| \approx g$. Ohne Einschränkung ist $0 \leq |f|, g \leq M$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \| |f|^p - g^p \|_{L^1} &= \int^* ||f|^p - g^p| \\ &= \int^* |P(|f|) - P(g)| \\ &\leq \int^* pM^{p-1} ||f| - g| \\ &\leq pM^{p-1}\varepsilon \end{aligned}$$

Dies wird nun wieder beliebig klein. □

## 8.3 Lebesgue-Nullmengen

**Definition 8.3.1.** Sei $A \subseteq \mathbb{R}^N$ und $1_A$ die zugehörige Indikatorfunktion. Falls $1_A \in \mathcal{L}$, nennen wir $A$ eine ***integrable Menge*** mit Volumen (Maß)

$$\operatorname{vol}(A) := \int 1_A$$

$A$ heißt ***Nullmenge***, falls

$$\operatorname{vol}(A) = 0$$

**Beispiel.**

$$\begin{aligned} \operatorname{vol}(A \cup B) &= \operatorname{vol}(A) + \operatorname{vol}(B) - \operatorname{vol}(A \cap B) \\ \operatorname{vol}(A \setminus B) &= \operatorname{vol}(A) - \operatorname{vol}(A \cap B) \end{aligned}$$

Dies gilt, falls alle Terme (bis auf eventuell einen) Lebesgue-integrierbar sind.

**Bemerkung.**

(i) $\mathbb{Q}$ ist eine Nullmenge ($1_{\mathbb{Q}}$ ist die Dirichlet-Funktion).

*denn:*

$$\int^* 1_{\mathbb{Q}} = \int^* \sum_{(p,q)=1} 1_{\{p/q\}} \leq \sum \int^* 1_{\{p,q\}} = \sum 0 = 0$$

(ii) Jede abzählbare Menge $A$ ist eine Nullmenge.

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ist eine Nullmenge, wenn jedes $A_n$ eine Nullmenge ist.

*denn:*

$$\int^* 1_{\bigcup A_n} = \int^* \sum 1_{A_n} \leq \sum \int^* 1_{A_n}$$

(iii) $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

(iv) Hyperebenen (endlich dimensionale echte Teilräume) des $\mathbb{R}^N$ sind Nullmengen (Spezialfall von (v)).

(v) Sei $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^N$ der Graph einer stetigen Funktion $f : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$, d. h.

$$\Gamma = \big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} \bigm| y = f(x) \big\}$$

Dann ist $\Gamma$ eine Nullmenge.

*denn:* Da $\Gamma$ abgeschlossen ist, ist $1_\Gamma \in \mathcal{H}^\downarrow$ und wegen Fubini gilt

$$\int^* 1_\Gamma = \mathcal{H}\text{–}\!\int 1_\Gamma = \int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} \underbrace{\left( \int\limits_{\mathbb{R}} 1_\Gamma(x,y)\,\mathrm{d}y \right)}_{=0} \mathrm{d}x$$

(vi) Sei $A$ eine Nullmenge und $u_A$ definiert als

$$u_A(x) := \begin{cases} \infty & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$

Dann gilt

$$u_A \in \mathcal{L} \quad \text{und} \quad \int u_A = 0$$

*denn:* Setze $g_n := 1_A$. Dann

$$0 \leq \int_* u_A \leq \int^* u_A = \int^* \sum_n g_n \leq \sum_n \underbrace{\int^* 1_A}_{=0} = 0$$

(vii) Sei $f \in \mathcal{L}$. Dann ist $A := \{x \mid f(x) = \pm\infty\}$ eine Nullmenge.

*denn:* Wegen $f \in \mathcal{L}$ ist auch $|f| \in \mathcal{L}$. Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$0 \leq \int^* 1_A \leq \int^* \varepsilon \cdot |f| = \varepsilon \cdot \underbrace{\|f\|}_{<\infty}$$

Dies wird beliebig klein. Also ist

$$\int^* 1_A = 0$$

(viii) Sei $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $L$. Sei weiterhin $A \subseteq \mathbb{R}^N$ eine Nullmenge. Dann ist auch $\varphi(A)$ eine Nullmenge.

*denn:* Sei $U$ eine offene Umgebung von $A$. Zerlege $U$ in Würfel mit Kantenlänge $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$

$$U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n$$
$$\sum_n \operatorname{vol}(W_n) \leq \operatorname{vol}(U) < \varepsilon$$

Wenn $W_n$ Kantenlänge $a$ hat (also $\operatorname{vol}(W_n) = a^N$), dann passt $\varphi(W_n)$ in einen Würfel der Kantenlänge $La$ ($L$ ist Lipschitzkonstante von $\varphi$ bezüglich der Maximumsnorm), also

$$\operatorname{vol}(\varphi(A)) \leq \sum_n \operatorname{vol}(\varphi(W_n)) \leq \sum_n L^N \cdot \operatorname{vol}(W_n) < L^N \cdot \varepsilon$$

Dies wird beliebig klein.

Vorlesung 26.01.10

**Definition 8.3.2.** Seien $f, g \in \mathcal{F}$. Wir sagen, dass $f = g$ ***fast überall*** (f. ü.), falls

$$\{x \mid f(x) \neq g(x)\}$$

eine Nullmenge ist.

*NB:* Die Gleichheit fast überall ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{F}$. Definiere dann

$$L^1 := \mathcal{L}/_{=\text{ f. ü.}}$$

**Satz 8.3.3.**

*(a) Sei $f \in \mathcal{L}$ und $g = f$ f. ü. Dann ist auch $g \in \mathcal{L}$ und es gilt*

$$\int g = \int f$$

*Im Klartext heißt das, dass die Werte, die $f$ auf Nullmengen annimmt, unbedeutend sind.*

*(b) $L^1$ ist ein Vektorraum mit Norm*

$$\|\cdot\|_{L^1}$$

*(c) Die Abbildung $I : L^1 \to \mathbb{R}$ mit $I(f) := \int f$ ist linear und beschränkt, also auch stetig.*

**Beweis:**

(a) Setze $h := |g - f|$. Es ist also

$$f - h \leq g \leq f + h$$

Außerdem gilt

$$0 \leq \int h \leq \int \infty \cdot 1_{\{f \neq g\}} = 0$$

Dann folgt

$$\int^* g \leq \int^* f + \underbrace{\int^* h}_{=0} = \int f$$

$$\int_* g \geq \int_* f - \int_* h = \int f$$

Also haben wir

$$\int f \leq \int_* g \leq \int^* g \leq \int f$$

und damit die Gleichheit.

(b) Es handelt sich um einen Vektorraum, da $f_1 + f_2$ und $\lambda f$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ wohldefiniert sind. Die Beschränktheit folgt, weil wir bereits gezeigt haben, dass mit $f \in \mathcal{L}$ auch $|f| \in \mathcal{L}$ und die Norm gerade darüber definiert ist:

$$\|f\|_{L^1} = \int^* |f| < \infty$$

Es bleibt zu zeigen, dass

$$\|f\|_{L^1} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{vol} \underbrace{\{x \mid f(x) \neq 0\}}_{A} = 0$$

Mit $f_n := |f|$ gilt

$$\int^* 1_A \leq \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\int^* f_n}_{=0} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{vol} A = 0$$

Dreiecksungleichung und Skalierung folgen wie für $\mathfrak{L}_1$.

Tatsächlich können wir in $L^1$ stets Repräsentanten in $\mathfrak{L}_1$ wählen.

(c) Die Linearität von $I$ ist wie in $\mathcal{L}_1$. Zeige also nur noch die Beschränktheit.

$$|I(f)| = \left| \int f \right| \leq \int |f| = \int^* |f| = \|f\|_{L^1} < \infty$$

$\square$

Später werden wir noch zeigen, dass $L^1$ sogar vollständig und somit ein Banachraum ist.

## 8.4 Konvergenzsätze

**Satz 8.4.1** (Monotone Konvergenz; *Beppo Levi*(1875-1961))**.** *Sei $f_n \in \mathcal{L}$ eine Folge mit*

$$f_1 \le f_2 \le \ldots \longrightarrow f \qquad (\forall x,\ f.\ \ddot{u}.)$$

*Ferner sei*

$$M := \lim_{n\to\infty} \int f_n < \infty$$

*Dann folgt, dass $f = \lim_{n\to\infty} f_n \in \mathcal{L}$ und*

$$\int f = \int \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int f_n$$

**Beweis:** Nach Voraussetzung gilt

$$f - f_n = \sum_{k\ge n} \underbrace{f_{k+1} - f_k}_{\ge 0}$$

Folglich

$$\begin{aligned}
\|f - f_n\|_{L^1} &= \int^* |f - f_n| \\
&= \int^* \sum_{k\ge n} (f_{k+1} - f_k) \\
&\le \sum_{k\ge n} \int^* (f_{k+1} - f_k) \\
&= \sum_{k\ge n} \int f_{k+1} - \int f_k \\
&= M - \int f_n \\
&\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Zu $\varepsilon > 0$ beliebig wähle also $f_n \in \mathcal{L}$ mit

$$\|f - f_n\|_{L^1} < \frac{\varepsilon}{2}$$

und zu $f_n$ wähle $g \in \mathcal{C}_c$ mit

$$\|f_n - g\|_{L^1} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Dann folgt

$$\|f - g\|_{L^1} < \varepsilon$$

Also ist $f \in \mathcal{L}$. Weil $I = \int$ auf $L^1$ stetig ist, folgt aus der Konvergenz gegen Null nun auch

$$I(f) = \int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n = \lim_{n\to\infty} I(f_n)$$

□

**Satz 8.4.2** (Majorisierte Konvergenz; *Lebesgue*(1875-1941)). *Sei $f_n \in \mathcal{L}$ mit $f_n \to f$ ($\forall x$ oder f. ü.). Es existiere eine integrierbare* **Majorante** *$F$ der $f_n$, d. h.*

$$\forall n : |f_n| \leq F \qquad \textit{und} \qquad \int^* F < \infty$$

*Dann folgt $f \in \mathcal{L}$ und*

$$\int f = \int \lim_{\mathrm{n}\to\infty} f_n = \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \int f_n$$

*Insbesondere existiert also die rechte Seite.*

**Beweis:** Dies lässt sich auf den vorhergehenden Satz (Beppo Levi) zurückführen.

$$g_{m,n}(x) := \left(\max_{m\leq k\leq n} f_k(x)\right) \underset{n\to\infty}{\nearrow} g_m(x) := \left(\sup_{k\geq m} f_k(x)\right) \underset{m\to\infty}{\searrow} f(x)$$

$$\int g_{m,n} \leq \int^* F < \infty$$

$$\int g_{m,n} \underset{n\to\infty}{\nearrow} \int g_m \underset{m\to\infty}{\searrow} \int f$$

$$\int g_m \geq -\int^* F$$

$$h_{m,n}(x) := \left(\min_{m\leq k\leq n} f_k(x)\right) \underset{n\to\infty}{\searrow} h_m(x) := \left(\inf_{k\geq m} f_k(x)\right) \underset{m\to\infty}{\nearrow} f(x)$$

$$\int h_{m,n} \underset{n\to\infty}{\searrow} \int h_m \underset{m\to\infty}{\nearrow} \int f$$

Also zusammen

$$\int f \underset{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}}{\longleftarrow} \int h_{m,n} \leq \int f_m \leq \int g_{m,n} \underset{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}}{\longrightarrow} \int f$$

Dann gilt auch

$$\int f_m \to \int f$$

□

**Beispiel.**

(i) $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, f(x) = \|x\|_2^{-\alpha}$ Dann gilt

$$f \in \mathcal{L}\left(B_R^N(0)\right) \Longleftrightarrow \alpha < N$$

wobei

$$B_R^N(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leq R\}$$

Denn mit

$$f_n(x) := \begin{cases} f(x) & \|x\| \geq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

haben wir $f_n \nearrow f$ und mit Übergang zu Polarkoordinaten gilt

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \|x\|_2^{-\alpha} &= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\frac{1}{n}}^{R} r^{-\alpha} r^{N-1} \, \mathrm{d}\alpha \cdot \operatorname{vol}\left(S^{N-1}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{N-\alpha} \cdot r^{N-\alpha}\right]_{\frac{1}{n}}^{R} \cdot \frac{N \cdot \pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right)} \\ &= \frac{N}{N-\alpha} \cdot \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right)} \cdot R^{N-\alpha} \end{aligned}$$

(ii) Für $s > 1$ ist

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} \, \mathrm{d}x = \zeta(s) \cdot \Gamma(s)$$

Dabei ist

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

und

$$\Gamma(s) := \int\limits_0^{\infty} y^{s-1} \cdot e^{-y} \, \mathrm{d}y$$

Denn mit

$$f_n(x) := \begin{cases} x^{s-1} \cdot e^{-nx} & x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist zunächst das einzelne Integral

$$\int\limits_0^{\infty} f_n(x) \, \mathrm{d}x = n^{-s} \cdot \int\limits_0^{\infty} (nx)^{s-1} \cdot e^{-nx} \, \mathrm{d}nx = n^{-s} \cdot \Gamma(s)$$

Für die Summe gilt

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{s-1} \cdot \left(e^{-x}\right)^n = x^{s-1} \cdot \left(\frac{1}{1-e^{-x}} - 1\right) = \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}$$

Diese Funktion wollen wir integrieren. Also

$$\int_0^{\infty} f(x) = \lim_{N\to\infty} \int \sum_{n=1}^{N} f_n(x) = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} n^{-s}\right) \cdot \Gamma(s)$$

(iii)

## 8.5 Die Banachräume $L^p$

Vorlesung 28.01.10

Sei stets $1 \leq p < \infty$.

**Definition 8.5.1.** Für $f \in \mathcal{F}$ setze

$$\|f\|_p = \|f\|_{L^p} := \left( \int^* |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \infty$$

Es bezeichne $\mathcal{L}^p$ diejenigen $f \in \mathcal{F}$, die ***lokal integrierbar*** sind ($f \in L^1_{loc}$), d. h. für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^N$ gilt

$$(f \cdot 1_K) \in L^1$$

Für diese Funktionen ist die Norm beschränkt, also

$$\|f\|_{L^p} < \infty$$

Setze nun

$$L^p = \mathcal{L}^p /_{= \text{ f. ü.}}$$

**Korollar 8.5.2.**

*(i)* $\|\lambda f\|_{L^p} = |\lambda| \cdot \|f\|_{L^p}$

*(ii) Minkowski-Ungleichung*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

*(iii) Hölder-Ungleichung: Sei* $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\|f\|_p < \infty$ *und* $\|g\|_q < \infty$. *Dann gilt*

$$\int^* |f \cdot g| \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

*Für* $p = q = 2$ *ist das die Cauchy-Schwarz-Ungleichung.*

**Beweis:** Aus der Analysis I ist bekannt, dass

$$\forall a, b \geq 0 \ : \ a^{\frac{1}{p}} \cdot b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p} \cdot a + \frac{1}{q} \cdot b$$

Dies gilt wegen der Konkavität des Logarithmus. Setze nun

$$\varphi := \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} \qquad \psi := \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q}$$

Mit $a = \varphi(x)$ und $b = \psi(x)$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\int^* \frac{|f \cdot g|}{\|f\|_p \cdot \|g\|_q} &= \int^* \left( \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \int^* \frac{1}{p} \cdot \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \int^* \frac{1}{q} \cdot \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q} \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\
&= 1
\end{aligned}$$

□

**Satz 8.5.3.**

(a) $L^p$ *ist ein Banachraum mit Norm* $\|\cdot\|_{L^p}$.

(b) $\mathcal{C}_c^\infty$ *ist dicht in* $L^p$.

(c) *Wenn* $f \in L^p$ *und* $g \in L^q$ *mit* $1 < p < \infty$ *und* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *dann ist* $(f \cdot g) \in L^1$ *und es gilt die Hölder-Ungleichung.*

**Bemerkung.** Funktionalanalysis:

$$L^q \subset (L^p)^*$$

Das heißt, dass $g \in L^q$ ein beschränktes, stetiges und lineares Funktional

$$f \mapsto \int f \cdot g$$

auf $L^p$ definiert.
Genauer gilt sogar

$$L^q = (L^p)^*$$
$$(L^p)^{**} = L^p$$

$L^2$ ist Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int f \cdot g$$
$$\langle f, f \rangle = \|f\|_2^2$$

**Beweis:** Hier wird lediglich die erste Aussage des Satzes bewiesen, der Rest kann in Büchern nachgelesen werden.
Dass $L^p$ ein Vektorraum ist, folgt aus den Eigenschaften (i) und (ii). Es bleibt zu zeigen, dass $L^p$ vollständig ist.
Gegeben sei eine $L^p$-Cauchyfolge $f_n \in L^p$. Finde $f \in L^p$ mit $f_n \longrightarrow f$, also

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_p = 0$$

Da es sich um eine Cauchyfolge handelt, genügt es die $L^p$-Konvergenz einer Teilfolge $f_{n_k}$ zu zeigen.
*Trick:* Versuche

$$f := f_{n_0} - \sum_{k=0}^{\infty} \left(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right)$$

und wähle $(f_{n_k})$ so, dass mit $g_k := f_{n_{k+1}} - f_{n_k}$ gilt:

$$\forall k \;:\; \|g_k\|_p \leq \frac{1}{2^k}$$

*Schritt 1:* $L^p$-Fassung der majorisierten Konvergenz.
Sei $L^p \ni \psi_n \longrightarrow \psi$ (f. ü.) mit $L^p$-Majorante $\Psi$, d. h.

$$\forall n\ :\ |\psi_n| \leq \Psi \quad \text{und} \quad \|\Psi\|_p^p = \int^* |\Psi|^p < \infty$$

Dann folgt $\psi \in L^p$ und $\|\psi_n - \psi\|_p \longrightarrow 0$.
*denn:* Sei $K \subseteq \mathbb{R}^N$ kompakt. Betrachte

$$\psi_n \cdot 1_K =: \varphi_n \longrightarrow \varphi := \psi \cdot 1_K$$

Es ist

$$\int |\varphi| = \int |\psi| \cdot 1_K \leq \int |\Psi| \cdot 1_K \leq \|\Psi\|_p \cdot \|1_K\|_q$$

Also ist $|\Psi| \cdot 1_K$ eine $L^1$-Majorante der $|\varphi_n|$. Darum gilt die Behauptung mit $L^1$-majorisierter Konvergenz.

$$\|\psi\|_p^p = \int^* |\psi|^p = \lim_{K \to \mathbb{R}^N} \int^* |\psi \cdot 1_K|^p \leq \int^* |\Psi|^p < \infty$$

Weiterhin

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty} \int |\psi_n - \psi|^p = \int \lim_{\mathrm{n}\to\infty} |\psi_n - \psi|^p = 0$$

Weil wir eine integrierbare Majorante haben, gilt

$$|\psi_n - \psi|^p \leq (|\psi_n| + |\psi|)^p \leq (2\,|\Psi|)^p = 2^p \cdot |\Psi|^p$$

*2. Schritt:* Folgere aus der Konvergenz $\sum \|g_k\|_p < \infty$ die absolute Konvergenz f. ü., d. h.

$$\psi := \lim_{m\to\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{m} g_k}_{\psi_m}$$

soll f. ü. existieren. Zeige weiterhin, dass $\psi \in L^p$ und

$$\|\psi_m - \psi\|_{L^p} = \left\| f_{n_{m+1}} - f_{n_0} - f + f_{n_0} \right\|_{L^p} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

*denn:* Setze

$$G_m := \sum_{k=0}^{m} |g_k| \underset{m}{\nearrow} G$$

Dabei soll $G$ der Kandidat für $|\Psi|$ aus Schritt 1 sein. Es ist

$$\|G_m\|_p^p \leq \left( \sum_{k=0}^{m} \|g_k\|_p \right)^p \leq \underbrace{\left( \sum_{k=0}^{\infty} \|g_k\|_p \right)^p}_{M^p} < \infty$$

Wegen Beppo Levi gilt

$$\int G_m^p \longrightarrow \int G^p \leq M^p$$

Also ist $G \in L^p$ eine $L^p$-Majorante der $\psi_m \in L^p$. Ferner ist $\{x \mid G(x) = \infty\}$ eine Nullmenge. Also konvergiert $\sum g_k$ absolut f. ü. Mit Schritt 1 ist nun

$$\psi := \lim_{m\to\infty} \psi_m = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \in L^p$$

und es gilt

$$\|\psi - \psi_m\|_p \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Damit also auch

$$\|f - f_{n_m}\|_p \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$\square$

Vorlesung 02.02.10

Wir können auch wieder den Transformationssatz formulieren.

**Satz 8.5.4.** *Sei $\varphi : U \to V \subseteq \mathbb{R}^N$ (beide Mengen offen) ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus und $f : V \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Dann gilt*

$$f \text{ ist integrierbar auf } V \quad \Longleftrightarrow \quad (f \circ \varphi) \cdot \left|\det \varphi'\right| \text{ ist integrierbar auf } U$$

*Außerdem*

$$\int_V f = \int_U (f \circ \varphi) \cdot \left|\det \varphi'\right|$$

**Beweis:** Es gilt

$$\mathcal{C}_c(U) \ni g_n \underset{L^1}{\longrightarrow} f \quad \text{(f. ü.)}$$

Für die $g_n$ gilt der Satz schon. Außerdem wird verwendet, dass für eine Nullmenge $N$ die Menge $\varphi^{-1}(N)$ ebenfalls eine ist, da $\varphi^{-1}$ Lipschitz-stetig ist. $\square$

## 8.6 Integrale mit Parametern

Betrachte $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $(x, y) \mapsto f(x, y)$ und versuche dazu zu definieren:

$$F(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y)\, \mathrm{d}y$$

$x \in \mathbb{R}^m$ wird also wie ein Parameter behandelt. Die Frage ist nun, ob $F$ integrierbar, stetig, differenzierbar vom Parameter $x$ abhängt, und wenn ja, wann?
Zunächst gilt der folgende Satz.

**Satz 8.6.1.** *Sei $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann ist $f(x, \cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $y \mapsto f(x, y)$ integrierbar für fast alle $x \in \mathbb{R}^m$ und $F(x)$ ist integrierbar mit*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} f = \int\limits_{\mathbb{R}^m} F(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left( \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x, y) \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

Dies ist also im Wesentlichen der Satz von Fubini.

**Beweis:** Betrachte

$$\mathcal{H}^{\downarrow} \ni \underline{h} \leq f \leq \overline{h} \in \mathcal{H}^{\uparrow}$$

Dann folgt

$$\int \underline{h} \,\mathrm{d}y =: \underline{H} \leq F_* := \int_* f \,\mathrm{d}y \leq \int^* f \,\mathrm{d}y =: F^* \leq \overline{H} := \int \overline{h} \,\mathrm{d}y$$

Die Differenz zwischen $F_*$ und $F^*$ ist dann höchstens $2\varepsilon$, wird also beliebig klein. Also ist

$$F_* = F^* = \int f$$

□

**Satz 8.6.2.** *Für $f : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^m$ gelte Folgendes:*

*(i)* *$f(x, \cdot) : y \mapsto f(x, y)$ sei integrierbar für alle $x$.*

*(ii)* *$f(\cdot, y) : x \mapsto f(x, y)$ sei stetig (in $x_0$) für fast alle $y$.*

*(iii)* *Es existiere eine Majorante*

$$|f(x, y) \leq M_y| \quad \textit{mit} \quad \|M\|_{L^1} < \infty$$

*Dann ist die Abbildung $x \mapsto F(x)$ stetig (in $x_0$).*

**Beweis:** Es gilt $f(x_n, \cdot) \longrightarrow f(x_0, \cdot)$ (f. ü.). Alle sind integrierbar und besitzen eine Majorante. Also auch $F(x_n) \longrightarrow F(x_0)$. □

**Satz 8.6.3.** *Für $f : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^m$ gelte Folgendes:*

*(i)* *$f(x, \cdot) : y \mapsto f(x, y)$ sei integrierbar für alle $x$.*

*(ii)* *Die Ableitung $f_x(\cdot, y) : x \mapsto f_x(x, y)$ existiere für fast alle $y$.*

*(iii)* *Es existiere eine Majorante*

$$|f(x, y) \leq M_y| \quad \textit{mit} \quad \|M\|_{L^1} < \infty$$

*Dann ist die Abbildung $x \mapsto F(x)$ differenzierbar und es gilt*

$$F'(x)[h] = \int f_x(x,y)[h] \, \mathrm{d}y$$

**Beweis:** Es ist

$$f_x(x,y)[h] = \lim_{t \searrow 0} \frac{1}{t} \left( f(x+th, y) - f(x,y) \right)$$

Also ist $f_x(x,\cdot)$ integrierbar. Weiterhin

$$\varepsilon_h(x,y) := \frac{1}{\|h\|} \left( f(x+h,y) - f(x,y) - f_x(x,y)[h] \right) \longrightarrow 0$$

$\square$

**Beispiel.** Betrachte zur Gauß'schen Glockenkurve

$$\varphi(t) := \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

die reellwertige Funktion

$$F(\omega) = \hat{\varphi}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \varphi(t) \, \mathrm{d}t$$

Mit dem Satz und partieller Integration folgt nun

$$\begin{aligned}
F'(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (-it) \cdot e^{-i\omega t} e^{-\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( e^{-\frac{t^2}{2}} \right) \mathrm{d}t \\
&= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( e^{-i\omega t} \right) e^{-\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}t \\
&= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (-i\omega) \cdot e^{-i\omega t} e^{-\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}t \\
&= -\omega \cdot F(\omega)
\end{aligned}$$

Von Gauß wissen wir, dass $F(0) = 1$. Solange $F > 0$, folgt also

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega} \left( \log F(\omega) \right) = -\omega$$

und somit

$$\log F(\omega) = -\frac{1}{2}\omega^2 + \underbrace{\log(F(0))}_{=0}$$

Daraus folgt

$$\hat{\varphi}(x) = F(\omega) = e^{-\frac{1}{2}\omega^2} = \varphi(\omega)$$

Die Gaußglocke ist also ein Fixpunkt von $\hat{\cdot}$.

Ein wichtiges Beispiel findet Anwendung in der Stochastik.

**Beispiel.** Das parameterabhängige Integral liefert die Faltung von zwei Funktionen $f, g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, definiert als

$$(f * g)(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$$

*Anwendung:* Wenn $f(z)\,\mathrm{d}z$ und $g(y)\,\mathrm{d}y$ die Wahrscheinlichkeitsdichten der unabhängigen Zufallsvariablen $Z, Y$ bezeichnen, dann ist $(f*g)(x)\,\mathrm{d}x$ die Wahrscheinlichkeitsdichte von $X := Y + Z$.

**Satz 8.6.4** (Faltung)**.** *Die Abbildung $* : L^1 \times L^1 \to L^1$ ist bilinear, beschränkt, stetig und symmetrisch. Falls $f \in \mathcal{C}_c^\infty$ und $g \in L^1$, so ist $f * g \in C^\infty$.*

## 8.7 Fourier-Transformation

**Definition 8.7.1.** Zu $f \in L^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ ist die ***Fourier-Transformierte*** gegeben durch

$$\hat{f}(\xi) := (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{-i\xi^T x} \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$$

**Bemerkung.**

(i) $\hat{\cdot} : L^1(\mathbb{R}^N) \to BC^0(\mathbb{R}^N)$ ist linear und beschränkt, also auch stetig. Außerdem gilt

$$\left|\hat{f}(\xi)\right| \leq (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \|f\|_{L^1}$$
$$\lim_{|\xi|\to\infty} \left|\hat{f}(\xi)\right| = 0$$

(ii) Für $\lambda \neq 0$ setze $f_\lambda := f(\lambda x)$. Dann gilt

$$\hat{f}_\lambda(\xi) = |\lambda|^{-N} \hat{f}\left(\frac{1}{\lambda}\xi\right)$$

(iii) Die Funktion

$$\varphi(x) := \exp\left(-\frac{1}{2}\|x\|_2^2\right)$$

mit $x \in \mathbb{R}^N$ ist ein Fixpunkt, d. h. $\varphi = \hat{\varphi}$.

(iv) Betrachte $f(x) := 1_{[-1,1]}$. Dann ist

$$\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\xi} \cdot \sin \xi$$

Das Integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{\xi} \cdot \sin \xi \, \mathrm{d}\xi$$

existiert uneigentlich, aber es ist $\frac{1}{\xi} \cdot \sin \xi \notin L^1$, denn sonst müsste auch $\left|\frac{1}{\xi} \cdot \sin \xi\right| \in L^1$ gelten, was aber nicht stimmt.